КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

А. Ю. ДАНЬШИН

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Казань — 2010

УДК 517.3

Публикуется по решению Редакционно-издательского совета физического факультета Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Даньшин А.Ю. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Учебное пособие. Казань: Каз. гос. ун-т, 2010 г.

Излагаются основные вопросы теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов. Изложение соответствует лекциям, которые читаются студентам 2-го курса физического факультета в курсе «Математический анализ». К каждому разделу прилагается несколько упражнений. В конце приведен список литературы, рекомендуемой для углубленного изучения материала.

Предназначено для студентов 2-го курса физического факультета.

Рецензент

канд. физ.-мат. наук, доцент В. А. Сочнева

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Определение двойного интеграла

В предыдущих разделах курса мы рассматривали определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

для случая, когда подинтегральная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ числовой прямой x. Мы знаем также, что с помощью определенного интеграла решается задача о вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной (или неположительной) функции $y = f(x)$, осью x и двумя вертикальными прямыми: $x = a$ и $x = b$. Значение этой площади выражается написанным выше определенным интегралом, и, таким образом, определенный интеграл получает геометрическое истолкование. Далее мы последовательно рассматривали интегральное исчисление функций одной действительной переменной. В данной части нашего курса мы обобщим понятие определенного интеграла и рассмотрим интегральное исчисление функций многих переменных. Ближайшим и непосредственным таким обобщением является понятие двойного интеграла.

Пусть $z = f(x, y)$ — неотрицательная функция двух переменных, определенная на области $\mathcal{D}$ координатной плоскости xy. График функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть некоторая поверхность $\mathcal{S}$ в трехмерном евклидовом пространстве E_3, отнесенном к декартовой системе координат x, y, z. Рассмотрим тело $\mathcal{V}$, ограниченное сверху этой поверхностью, снизу областью $\mathcal{D}$, с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z и проходящими через границу области $\mathcal{D}$. Нашей задачей будет найти объем V тела $\mathcal{V}$. Эта задача и приведет нас к определению двойного интеграла подобно тому, как задача о нахождении площади криволинейной трапеции приводит к определенному интегралу.

Разложим область $\mathcal{D}$ сетью кривых на элементарные (малые) области $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, ..., \mathcal{D}_n$ и рассмотрим набор цилиндрических столбиков, которые имеют своим основанием эти элементарные области и в совокупности составляют данное тело $\mathcal{V}$. Вычислим объемы этих столбиков. Поскольку области $\mathcal{D}_i$ малы мы можем приближенно считать наши столбики настоящими цилиндрами. Как мы знаем, объем цилиндра вычисляется как произведение площади основания на высоту: $V = S \cdot h$. Обозначим объемы наших элементарных цилиндров через ΔV_i, площади их оснований будем обозначать буквами ΔS_i. Для того, чтобы найти высоты наших цилиндров возьмем внутри каждой области $\mathcal{D}_i$ по одной произвольной точке с координатами (x_i, y_i). Тогда высота i-го цилиндра будет равна значению нашей функции в этой точке $f(x_i, y_i)$. Таким образом, имеем:

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i)\, \Delta S_i \,.$$

Объем всего тела $\mathcal{V}$ приближенно равен сумме всех элементарных объемов:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i \,.$$

Чем мельче будет разбиение нашей области, тем точнее будет это равенство, а в пределе при беспредельном уменьшении каждой из элементарных областей $\mathcal{D}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных областей это равенство станет точным. Чтобы отразить тот факт, что размеры всех областей $\mathcal{D}_i$ мы будем устремлять к нулю, обозначим через $\Delta S_{\max}$ максимальную площадь среди всех областей $\mathcal{D}_i$, то есть $\Delta S_{\max} = \max\limits_i \Delta S_i$. Тогда если $\Delta S_{\max} \to 0$, то и $\Delta S_i \to 0$ для всех i. Здесь подразумевается также, что количество областей n стремится к бесконечности, поскольку разбиение нашей фиксированной области $\mathcal{D}$ становится все мельче, а значит количество элементарных областей $\mathcal{D}_i$ возрастает.

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$$

при беспредельном уменьшении площадей ΔS_i элементарных областей $\mathcal{D}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных областей называется *двойным интегралом (Римана)* от функции $z = f(x, y)$ по области $\mathcal{D}$ и обозначается символом:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dS\,.$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения области $\mathcal{D}$, ни от выбора точек (x_i, y_i) внутри элементарных областей $\mathcal{D}_i$.

Итак,

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,,$$

где $\Delta S_{\max} = \max\limits_{i} \Delta S_i$.

Определение. Сумма $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$ называется *интегральной суммой* для двойного интеграла $\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dS$.

Отнесем область $\mathcal{D}$ к прямоугольным декартовым координатам и допустим, что элементарные области $\mathcal{D}_i$ получаются путем разбиения области $\mathcal{D}$ на прямоугольники со сторонами Δx_i и Δy_i сеткой прямых, параллельных координатным осям. Тогда мы можем написать, что $\Delta S_i = \Delta x_i\,\Delta y_i$ для любого i. Выражение $dS = dx\,dy$ называется *элементом площади в прямоугольных декартовых координатах.* Таким образом, определение двойного интеграла в прямоугольной декартовой системе координат примет вид:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_{\max}\to 0\\ \Delta y_{\max}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i\ ,$$

где $\Delta x_{\max} = \max\limits_i \Delta x_i$, $\Delta y_{\max} = \max\limits_i \Delta y_i$.

Теория двойного интеграла строится по аналогии с теорией определенного интеграла Римана. Ниже мы приведем основные определения и теоремы. Доказательства всех приведенных ниже теорем проводятся подобно тому, как они были проведены для определенного интеграла функции одной переменной. Предоставляем читателю проведение этих доказательств в качестве упражнения.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется интегрируемой по Риману в области $\mathcal{D}$, если для нее существует двойной интеграл Римана по этой области.

Теорема 1. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема по Риману в области $\mathcal{D}$, то она ограничена в этой области.

Определение. Нижняя s и верхняя S суммы Дарбу для двойного интеграла определяются следующим образом:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta S_i\ ,\ S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta S_i\ ,$$

где

$$m_i = \inf_{(x,y)\in\mathcal{D}_i} f(x,y)\ ,\ M_i = \sup_{(x,y)\in\mathcal{D}_i} f(x,y)\ .$$

Свойства сумм Дарбу.

1) При дальнейшем разбиении области $\mathcal{D}$ проведением новых линий деления, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя не возрастает.

2) Каждая нижняя сумма Дарбу не превышает каждой верхней, даже отвечающей любому другому разложению области $\mathcal{D}$ на элементарные области.

3) При данном разбиении и независимо от выбора точек (x_i, y_i) будут выполняться неравенства

$$s \leqslant \sigma \leqslant S \,.$$

Определение. Нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу определяются следующим образом:

$$I_* = \sup_T s \,, \; I^* = \inf_T S \,,$$

где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям T области $\mathcal{D}$.

Теорема 2. Для существования двойного интеграла, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta S_{\max} \to 0} (S - s) = 0$$

или, что тоже

$$I_* = I^* \,.$$

Теорема 3. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области $\mathcal{D}$, то она интегрируема в этой области.

Теорема 4. Если ограниченная функция $z = f(x, y)$ имеет в области $\mathcal{D}$ разрывы разве лишь на конечном числе кусочно-гладких кривых, то она интегрируема по Риману в этой области.

1.2. Свойства двойного интеграла

Свойства двойного интеграла, приведенные ниже, доказываются также, как свойства определенного интеграла непосредственно из его определения как предела суммы.

1. Если произвольным образом изменить значения интегрируемой в области $\mathcal{D}$ функции $f(x, y)$ вдоль какой-либо кусочно-гладкой кривой на конечные величины, то вновь полученная функция также интегрируема в области $\mathcal{D}$ и ее двойной интеграл равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$.

2. Если область $\mathcal{D}$ разбита некоторой кусочно-гладкой кривой на две части $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, то из интегрируемости функции $f(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ следует ее интегрируемость в областях $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, причем интеграл по всей области равен сумме интегралов по ее частям:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathcal{D}_2} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Эту формулу можно обобщить на произвольное конечное разбиение области $\mathcal{D}$ на ее составные части $\mathcal{D}_i$, $i = 1, ..., n$:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathcal{D}_i} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

3. Постоянный множитель $c = \text{const}$ может быть вынесен за знак интеграла:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} c \cdot f(x, y)\, dx\, dy = c \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

4. Если в области $\mathcal{D}$ интегрируемы функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, то в этой области интегрируема функция $f(x, y) + g(x, y)$, причем:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (f(x, y) + g(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Эту формулу можно легко обобщить на произвольное число слагаемых:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathcal{D}} f_i(x, y)\, dx\, dy\,.$$

5. Если для интегрируемых в области $\mathcal{D}$ функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ неравенство $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ выполняется в каждой точке этой области, то

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{\mathcal{D}} g(x, y)\, dx\, dy\,.$$

6. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области $\mathcal{D}$, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема в этой области и справедливо неравенство:

$$\left|\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_{\mathcal{D}} |f(x,y)|\,dx\,dy\,.$$

7. Теорема о среднем значении интеграла. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области $\mathcal{D}$ и удовлетворяет в этой области неравенствам

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M\,,$$

где m и M некоторые константы, то

$$m\cdot S \leqslant \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant M\cdot S\,,$$

где

$$S = \iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy$$

площадь области $\mathcal{D}$. При этом в области $\mathcal{D}$ существует такая точка с координатами (x_0,y_0), что справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\cdot S\,.$$

8. Обобщенная теорема о среднем значении интеграла. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области $\mathcal{D}$, функция $g(x,y)$ сохраняет знак в области $\mathcal{D}$ и в этой области справедливы неравенства

$$m \leqslant f(x,y)\cdot g(x,y) \leqslant M\,,$$

то

$$m\cdot S \leqslant \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx\,dy \leqslant M\cdot S\,.$$

При этом в области $\mathcal{D}$ существует такая точка с координатами (x_0, y_0), что справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\cdot g(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0)\iint\limits_{\mathcal{D}} g(x,y)\,dx\,dy\,.$$

1.3. Сведение двойного интеграла к повторному для прямоугольной области

Пусть $P = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ — прямоугольная область на плоскости xy.

Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в прямоугольной области P, и $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл Римана

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b I(x)\,dx\,,$$

причем выполняется равенство

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Доказательство. Разобьем прямоугольную область P сетью прямых, параллельных координатным осям. Тогда область P разложится на элементарные прямоугольные области

$$P_{ik} = \{(x,y)\,|\,x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}\,,\ y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}\}\,.$$

Введем числа

$$m_{ik} = \inf_{(x,y)\in P_{ik}} f(x,y)\,,\ M_{ik} = \sup_{(x,y)\in P_{ik}} f(x,y)\,.$$

Очевидно, что

$$m_{ik} \leqslant f(x, y) \leqslant M_{ik} \ , \ \forall (x, y) \in P_{ik} \ .$$

Тогда $\forall \tilde{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ по теореме о среднем значении определенного интеграла имеем

$$m_{ik} \, \Delta y_k \leqslant \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\tilde{x}_i, y) \, dy \leqslant M_{ik} \, \Delta y_k \ ,$$

где $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и интеграл существует, так как $\exists I(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Составим суммы

$$\sum_k m_{ik} \, \Delta y_k \leqslant I(\tilde{x}_i) = \int\limits_c^d f(\tilde{x}_i, y) \, dy \leqslant \sum_k M_{ik} \, \Delta y_k \ ,$$

где суммы берутся по всем допустимым значениям индекса k. Умножим все части этой цепочки неравенств на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и просуммируем по всем допустимым значениям индекса i. Получим

$$s = \sum_{i,k} m_{ik} \, \Delta x_i \, \Delta y_k \leqslant \sum_i I(\tilde{x}_i) \, \Delta x_i \leqslant \sum_{i,k} M_{ik} \, \Delta x_i \, \Delta y_k = S \ ,$$

где слева и справа получились суммы Дарбу для двойного интеграла функции $f(x, y)$ по прямоугольнику P, а в центре интегральная сумма для определенного интеграла функции $I(x)$ по сегменту $[a, b]$. При устремлении сторон всех элементарных прямоугольников к нулю суммы Дарбу s и S устремятся к значению $\iint\limits_P f(x, y) \, dx \, dy$ снизу и сверху соответственно, а предел интегральной суммы для определенного интеграла функции $I(x)$ по сегменту $[a, b]$ даст значение этого интеграла

$$\int\limits_a^b I(x) \, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) \, dy \ .$$

Отсюда с учетом теоремы о среднем теории пределов получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Если в формулировке и доказательстве этой теоремы переменные x и y поменять ролями, то есть предположить существование интеграла

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\,,$$

то мы сможем доказать следующую формулу

$$\iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx\,.$$

Если вместе с двойным интегралом существуют оба интеграла

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy\,,\ I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\,,$$

то справедливы обе доказанные формулы одновременно, откуда следует формула

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx\,,$$

которая называется *формулой перемены порядка интегрирования в повторном интеграле.*

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_P (x+2y)\,dx\,dy\,,$$

где $P = \{(x,y)\,|\,1 \leqslant x \leqslant 3\,,\ -2 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Решение.

$$\iint_P (x+2y)\,dx\,dy = \int_1^3 dx \int_{-2}^1 (x+2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_1^3 (xy + y^2)\Big|_{-2}^{1} dx = \int\limits_1^3 (3x - 3)\, dx = 6\,.$$

1.4. Сведение двойного интеграла к повторному для произвольной области

Рассмотрим область $\mathcal{D}$, ограниченную сверху и снизу двумя кривыми, являющимися графиками непрерывных функций

$$y = y_1(x)\ ,\ y = y_2(x)\ ,$$

а с боков двумя прямыми $x = a$, $x = b$.

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области

$$\mathcal{D} = \{(x, y)\,|\, a \leqslant x \leqslant b\ ,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}\,,$$

где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ — определенные на сегменте $[a, b]$ непрерывные функции, и $\forall x \in [a, b]$ существует интеграл Римана

$$I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\ ,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b I(x)\, dx\ ,$$

причем справедлива формула

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\ ,$$

которая называется *формулой сведения двойного интеграла к повторному.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D} \subset P$, где

$$P = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b\ ,\ c \leqslant y \leqslant d\}\,.$$

Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \text{ если } (x, y) \in \mathcal{D}\,, \\ 0 & , \text{ если } (x, y) \in P \backslash \mathcal{D}\,. \end{cases}$$

Очевидно

$$\iint\limits_{P} F(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy\ ,$$

так как

$$\iint\limits_{P \backslash \mathcal{D}} F(x, y)\, dx\, dy = 0\,.$$

При каждом $x \in [a, b]$ имеем

$$\int\limits_{c}^{d} F(x, y)\, dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\,.$$

По теореме 1 предыдущего параграфа

$$\iint\limits_{P} F(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} F(x, y)\, dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\ ,$$

откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (x + 2y)\, dx\, dy\ ,$$

где область $\mathcal{D}$ ограничена кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение. Область $\mathcal{D}$ ограничена снизу кривой $y = x^2$, а сверху кривой $y = \sqrt{x}$, поэтому имеем:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (x + 2y)\, dx\, dy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + 2y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 (xy + y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} + x - x^3 - x^4)\, dx = \frac{9}{20}\,.$$

Замечание. Если в формулировке и доказательстве этой теоремы переменные x и y поменять ролями, то есть рассмотреть область

$$\mathcal{D} = \{(x, y)\,|\, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\ ,\ c \leqslant y \leqslant d\}\,,$$

где $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ непрерывные функции определенные на сегменте $[c, d]$ и предположить существование интеграла

$$I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\,,$$

то мы сможем доказать следующую формулу

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\,.$$

Если вместе с двойным интегралом существуют оба интеграла

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\ ,\ I(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\,,$$

то справедливы обе доказанные формулы одновременно, откуда следует формула

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\,,$$

которая называется *формулой перемены порядка интегрирования в повторном интеграле.*

Пример. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_{-1}^1 dy \int_{1-y^2}^{y^2-1} f(x, y)\, dx\,.$$

Решение. Область интегрирования ограничена двумя гладкими кривыми $x = 1 - y^2, x = y^2 - 1$. Снизу эта область ограничена кусочно-гладкой кривой:

$$y_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+x} & \text{при} \quad -1 \le x \le 0\,, \\ -\sqrt{1-x} & \text{при} \quad 0 \le x \le 1\,, \end{cases}$$

а сверху кусочно-гладкой кривой:

$$y_2(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{при} \quad -1 \le x \le 0\,, \\ \sqrt{1-x} & \text{при} \quad 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Верхняя и нижняя границы области не являются гладкими, поэтому разобьем область на две области вертикальной прямой, проходящей через точки перелома границы. Получим:

$$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{1-y^2}^{y^2-1} f(x,y)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy\,.$$

1.5. Замена переменных в двойном интеграле

В предыдущих параграфах мы определили и научились вычислять двойные интегралы в прямоугольной декартовой системе координат. Однако в практических задачах очень часто бывает необходимо уметь вычислять интегралы в произвольной криволинейной системе координат.

Пусть $\mathcal{D}$ — область на плоскости, отнесенной к прямоугольным декартовым координатам x и y. Введем в области $\mathcal{D}$ некоторые новые произвольные координаты u и v, однозначно связанные с декартовыми координатами уравнениями перехода:

$$F: \begin{cases} x = x(u,v)\,, \\ y = y(u,v)\,, \end{cases}$$

где $x = x(u,v)$ и $y = y(u,v)$ — непрерывно дифференцируемые функции переменных u и v. Однозначность уравнений перехода необходима для того, чтобы новые координаты по прежнему различали точки, то есть каждые две разные точки должны иметь отличающиеся наборы координат. Из теории функций многих переменных мы знаем, что такая система двух функций двух переменных задает взаимно-однозначное отображение F некоторой области $\mathcal{D}'$ на плоскости координат u и v на область $\mathcal{D}$ на плоскости координат x и y, если якобиан этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не равен нулю $(J(u, v) \neq 0)$ в каждой точке области $\mathcal{D}'$.

Отображение F можно также задать вектор-функцией

$$\mathbf{r} = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j}\,.$$

При фиксированных значениях параметра v получаются уравнения координатных линий, вдоль которых меняется переменная u, а при фиксированных значениях параметра u получаются уравнения координатных линий, вдоль которых меняется переменная v. Параметры u и v называются *криволинейными координатами* в области $\mathcal{D}$. Область $\mathcal{D}'$ вместе с уравнениями перехода (то есть уравнениями, задающими взаимно-однозначное дифференцируемое отображение $F : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$) называется координатной системой в области $\mathcal{D}$.

Выражение $dS = dx\,dy$ является элементом площади в прямоугольных координатах. Теперь нам необходимо вычислить, как выглядит элемент площади в криволинейных координатах.

Рассмотрим элементарный прямоугольник в области $\mathcal{D}'$ с длинами сторон Δu и Δv. При отображении F ему будет соответствовать «криволинейный четырехугольник» — малая область, ограниченная близкими координатными кривыми криволинейной системы координат в области $\mathcal{D}$. Обозначим его площадь через ΔS, а вершины $PQTR$. Пусть вершина P имеет криволинейные координаты (u_0, v_0), тогда остальные вершины имеют координаты $Q(u_0+\Delta u, v_0)$, $R(u_0, v_0+\Delta v)$, $T(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$. Длины отрезков PQ и PR соответственно равны

$$|PQ| = |\mathbf{r}(u_0+\Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)| = |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\,\Delta u + o(\Delta u)|\,,$$

$$|PR| = |\mathbf{r}(u_0, v_0+\Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)| = |\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\,\Delta v + o(\Delta v)|\,.$$

Очевидно, что площадь ΔS криволинейного четырехугольника $PQSR$ с точностью до бесконечно малых высших порядков равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v$.

Из курса аналитической геометрии мы знаем, что площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}(x_1, y_1, 0)$ и $\mathbf{b}(x_2, y_2, 0)$, лежащих в координатной плоскости xy трехмерного пространства, отнесенного к декартовым координатам x, y, z, выражается при помощи векторного произведения формулой:

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}|\,.$$

Применяя эту формулу для вычисления площади ΔS, получим:

$$\Delta S = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}|\,\Delta u\,\Delta v\,,$$

то есть $\Delta S = |J(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$.

Определение. Выражение $dS = |J(u,v)|\,du\,dv$ называется *элементом площади в криволинейных координатах.*

Рассмотрим двойной интеграл от функции $z = f(x,y)$ по области $\mathcal{D}$. В декартовой системе координат по определению

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Delta x_{\max}\to 0 \\ \Delta y_{\max}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i\,,$$

где область $\mathcal{D}$ разложена на элементарные области сетью прямых параллельных координатным осям декартовой системы координат.

Рассмотрим теперь разбиение области $\mathcal{D}$ сетью координатных кривых криволинейной системы координат. По определению

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\, \Delta S_i\ .$$

Применим к каждой элементарной области формулу

$$\Delta S_i = |J(u_i,v_i)|\, \Delta u_i\, \Delta v_i\ ,$$

где предполагается, что $x_i = x(u_i,v_i)$, $y_i = y(u_i,v_i)$. Тогда интегральная сумма принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i))\, |J(u_i,v_i)|\, \Delta u_i\, \Delta v_i\ ,$$

и, очевидно, она является интегральной суммой для двойного интеграла по области $\mathcal{D}'$. Заметим, что при $\Delta S_{\max} \to 0$ будут иметь место $\Delta u_{\max} \to 0$ и $\Delta v_{\max} \to 0$. На основании всего этого мы можем записать следующую формулу:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, du\, dv\ ,$$

которая называется *формулой замены переменных в двойном интеграле.*

Рассмотрим формулы перехода к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\ , \\ y = r\sin\varphi\ . \end{cases}$$

В этом случае

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\ .$$

Формула замены переменных в двойном интеграле принимает вид:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi\ .$$

Пример. Переходя к полярной системе координат, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy\,,$$

где область $\mathcal{D}$ — кольцо между двумя окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$.

Решение. Кольцо расположено между окружностями радиусов 3 и 5, поэтому, переходя в интеграле к полярным координатам, будем иметь:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_3^5 \sqrt{r^2-9}\,r\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_3^5 \sqrt{r^2-9}\,d(r^2-9) = \pi\,\frac{2}{3}(r^2-9)^{3/2}\Big|_3^5 = \frac{128}{3}\pi\,.$$

1.6. Приложения двойных интегралов

1. Вычисление площадей плоских фигур

$$S = \iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy\,.$$

2. Вычисление объемов цилиндрических тел

$$V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

где V — объем тела в трехмерном пространстве, заключенного между поверхностью, являющейся графиком неотрицательной (или неположительной) функции $z=f(x,y)$, координатной плоскостью xy и цилиндром с образующими, проходящими через границу области $\mathcal{D}$ параллельно оси z.

3. Вычисление массы (заряда) плоской бесконечно тонкой пластины. Пусть $\rho = \rho(x, y)$ — плотность распределения массы (заряда) неоднородной (неравномерно заряженной) пластины $\mathcal{D}$. Тогда масса Δm (заряд Δq) малой области пластины с площадью $\Delta S = \Delta x\, \Delta y$, содержащей точку (x, y) выражается равенством

$$\Delta m\,(\text{или}\,\Delta q) = \rho(x, y)\,\Delta x\,\Delta y\,.$$

Для нахождения массы (заряда) пластины необходимо просуммировать элементарные массы (заряды) по всей пластине и устремить площади всех элементарных областей к нулю. Отсюда видно, что масса (заряд) пластины выражается двойным интегралом

$$m\,(\text{или}\,q) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x, y)\,dx\,dy\,.$$

4. Вычисление центра масс плоской неоднородной пластины. Из курса механики мы знаем, что радиус-вектор $\mathbf{r_c}$ центра масс системы n частиц с массами m_i и положениями в пространстве, заданными радиус-векторами $\mathbf{r}_i$, выражается по формуле

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum\limits_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum\limits_i m_i}\,.$$

Обобщая эту формулу на случай непрерывного распределения масс по плоской области $\mathcal{D}$ с плотностью $\rho = \rho(x, y)$, получим формулу

$$\mathbf{r}_c = \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} \mathbf{r}\,\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x, y)\,dx\,dy}\,,$$

то есть координаты центра масс плоской неоднородной пластины вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} x\,\rho(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x, y)\,dx\,dy}\,,$$

$$y_c = \frac{\iint\limits_{\mathcal{D}} y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(x,y)\,dx\,dy}\ .$$

5. Вычисление статических моментов и моментов инерции плоской неоднородной пластины. Пусть $\rho = \rho(x,y)$ — плотность распределения массы неоднородной пластины $\mathcal{D}$. Статические моменты малой области пластины относительно координатных осей соответственно равны

$$\Delta M_x = y\,\Delta m = y\,\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y\ ,$$

$$\Delta M_y = x\,\Delta m = x\,\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y\ .$$

Для нахождения статических моментов пластины необходимо просуммировать элементарные моменты по всей пластине и устремить площади всех элементарных областей к нулю. Отсюда видно, что статические моменты пластины относительно координатных осей выражаются по формулам

$$M_x = \iint\limits_{\mathcal{D}} y\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ ,$$

$$M_y = \iint\limits_{\mathcal{D}} x\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ .$$

Аналогично можно получить формулы для моментов инерции пластины относительно координатных осей

$$J_x = \iint\limits_{\mathcal{D}} y^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ ,$$

$$J_y = \iint\limits_{\mathcal{D}} x^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ .$$

1.7. Упражнения

1. Двойной интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

свести к повторному и определить его пределы интегрирования, если область интегрирования $\mathcal{D}$ ограничена сверху и снизу ветвями гиперболы $y^2 - x^2 = 1$, а с боков двумя прямыми $x = 2$ и $x = -2$.

2. Вычислить следующие повторные интегралы:

$$\text{а)} \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,dx\,, \quad \text{б)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dy}{1+y^2}\,,$$

$$\text{в)} \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2\,dy}{y^2}\,, \qquad \text{г)} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\,dr\,.$$

3. Переменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$\text{а)} \int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy\,, \quad \text{б)} \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\,,$$

$$\text{в)} \int\limits_0^a dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,, \quad \text{г)} \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,,$$

$$\text{д)} \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,, \quad \text{е)} \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\,.$$

4. Доказать свойства двойного интеграла, приведенные в параграфе 1.4, исходя непосредственно из его определения как предела суммы.

5. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy\,,$$

где область интегрирования $\mathcal{D}$ — полукруг радиуса a с центром в начале координат, лежащий выше оси x.

6. Переходя к полярным координатам, вычислить:

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\,.$$

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Определение тройного интеграла

Пусть $\rho = f(x, y, z)$ — функция трех переменных, определенная в некоторой области $\mathcal{V}$ трехмерного евклидова пространства E_3. Таким образом, каждой точке тела $\mathcal{V}$ сопоставлено некоторое число ρ. Используя физическую аналогию, мы можем считать тело $\mathcal{V}$ некоторым материальным объектом с общей массой m и плотностью ρ. Плотность тела меняется от точки к точке, то есть распределение материи в нем неоднородно. Нашей задачей будет определить полную массу m тела $\mathcal{V}$ при известном распределении плотности материи $\rho = f(x, y, z)$.

Разобьем весь объем тела $\mathcal{V}$ на большое число малых элементов $\mathcal{V}_i$ с объемами ΔV_i. Масса Δm_i каждого элемента приближенно равна:

$$\Delta m_i \approx f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i\,,$$

где (x_i, y_i, z_i) координаты произвольно выбранной точки внутри i-го элемента объема. Тогда полная масса тела будет приближенно равна:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i\,.$$

Точность этого приближенного соотношения повышается при уменьшении объемов ΔV_i элементарных областей $\mathcal{V}_i$. При этом увеличивается число n элементарных областей. В пределе при беспредельном сужении по всем направлениям каждой из элементарных областей $\mathcal{V}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных областей равенство становится точным:

$$m = \lim_{\Delta V_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i\,,$$

где через $\Delta V_{\max}$ обозначен максимальный объем среди всех элементарных объемов ΔV_i.

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

при беспредельном уменьшении объемов ΔV_i элементарных областей $\mathcal{V}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных областей называется *тройным интегралом (Римана)* от функции $f(x, y, z)$ по области $\mathcal{V}$ и обозначается символом:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dV\,.$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения области $\mathcal{V}$, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) внутри элементарных областей $\mathcal{V}_i$.

Итак,

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dV \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i\,,$$

где $\Delta V_{\max} = \max\limits_{i} \Delta V_i$.

Отнесем область $\mathcal{V}$ к прямоугольным координатам и допустим, что элементарные области $\mathcal{V}_i$ получаются путем разбиения объема всего тела $\mathcal{V}$ на прямоугольные параллелепипеды со сторонами Δx_i, Δy_i и Δz_i. Тогда мы можем написать, что $\Delta V_i = \Delta x_i\, \Delta y_i\, \Delta z_i$ для всех i. Выражение $dV = dx\, dy\, dz$ называется *элементом объема в прямоугольных координатах.* Таким образом, определение тройного интеграла в прямоугольной декартовой системе координат примет вид:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\substack{\Delta x_{max} \to 0 \\ \Delta y_{max} \to 0 \\ \Delta z_{max} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta x_i\, \Delta y_i\, \Delta z_i\,,$$

где $\Delta x_{\max} = \max\limits_{i} \Delta x_i$, $\Delta y_{\max} = \max\limits_{i} \Delta y_i$, $\Delta z_{\max} = \max\limits_{i} \Delta z_i$.

Теория тройного интеграла строится по той же схеме, что и теория двойного интеграла.

Определение. Функция $\rho = f(x, y, z)$ называется интегрируемой по Риману в области $\mathcal{V}$, если для нее существует тройной интеграл Римана по этой области.

Теорема 1. Если функция $\rho = f(x, y, z)$ интегрируема по Риману в области $\mathcal{V}$, то она ограничена в этой области.

Определение. Нижняя s и верхняя S суммы Дарбу для тройного интеграла определяются следующим образом:

$$s \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta V_i \, , \; S \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta V_i \, ,$$

где

$$m_i = \inf_{(x,y,z)\in\mathcal{V}_i} f(x, y, z) \, , \; M_i = \sup_{(x,y,z)\in\mathcal{V}_i} f(x, y, z) \, .$$

Свойства сумм Дарбу.

1) При дальнейшем разбиении области $\mathcal{V}$ проведением новых поверхностей деления, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя не возрастает.

2) Каждая нижняя сумма Дарбу не превышает каждой верхней, даже отвечающей любому другому разложению области $\mathcal{V}$ на элементарные области.

3) При данном разбиении и независимо от выбора точек (x_i, y_i, z_i) будут выполняться неравенства

$$s \leqslant \sigma \leqslant S \, .$$

Определение. Нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу определяются следующим образом:

$$I_* = \sup_T s \, , \; I^* = \inf_T S \, ,$$

где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям T области $\mathcal{V}$.

Теорема 2. Для существования двойного интеграла, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta V_{\max}\to 0} (S - s) = 0$$

или, что тоже

$$I_* = I^* .$$

Теорема 3. Если функция $\rho = f(x, y, z)$ непрерывна в области $\mathcal{V}$, то она интегрируема в этой области.

Теорема 4. Если ограниченная функция $\rho = f(x, y, z)$ имеет в области $\mathcal{V}$ разрывы разве лишь на конечном числе гладких поверхностей, то она интегрируема по Риману в этой области.

2.2. Свойства тройного интеграла

Свойства тройного интеграла доказываются также, как свойства двойного интеграла, то есть непосредственно из его определения как предела суммы.

1. Если произвольным образом изменить значения интегрируемой в области $\mathcal{V}$ функции $f(x, y, z)$ вдоль какой-либо гладкой поверхности на конечные величины, то вновь полученная функция также интегрируема в области $\mathcal{V}$ и ее тройной интеграл равен тройному интегралу от функции $f(x, y, z)$.

2. Если область $\mathcal{V}$ разбита гладкой поверхностью на две части $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$, то из интегрируемости функции $f(x, y, z)$ в области $\mathcal{V}$ следует ее интегрируемость в областях $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$, причем интеграл по всей области равен сумме интегралов по ее частям:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathcal{V}_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{\mathcal{V}_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

Эту формулу можно обобщить на произвольное конечное разбиение области $\mathcal{V}$ на ее составные части $\mathcal{V}_i$, $i = 1, ..., n$:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{n} \iiint\limits_{\mathcal{V}_i} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

3. Постоянный множитель $c = \mathrm{const}$ может быть вынесен за знак интеграла:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} c \cdot f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = c \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

4. Если в области $\mathcal{V}$ интегрируемы функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$, то в этой области интегрируема функция $f(x, y, z) + g(x, y, z)$, причем:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} (f(x, y, z) + g(x, y, z))\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{\mathcal{V}} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Эту формулу можно легко обобщить на произвольное число слагаемых:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{n} \iiint\limits_{\mathcal{V}} f_i(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

5. Если для интегрируемых в области $\mathcal{V}$ функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ неравенство $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$ выполняется в каждой точке этой области, то

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant \iiint\limits_{\mathcal{V}} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

6. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области $\mathcal{V}$, то функция $|f(x, y, z)|$ также интегрируема в этой области и справедливо неравенство:

$$\left| \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant \iiint\limits_{\mathcal{V}} |f(x, y, z)|\, dx\, dy\, dz\,.$$

7. Теорема о среднем значении интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема в области $\mathcal{V}$ и удовлетворяет в этой области неравенствам

$$m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M\,,$$

где m и M некоторые константы, то

$$m \cdot V \leqslant \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant M \cdot V\,,$$

где

$$V = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dx\, dy\, dz$$

объем области $\mathcal{V}$. При этом в области $\mathcal{V}$ существует такая точка с координатами (x_0, y_0, z_0), что справедлива следующая формула:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V\,.$$

8. Обобщенная теорема о среднем значении интеграла. Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы в области $\mathcal{V}$, функция $g(x, y, z)$ сохраняет знак в области $\mathcal{V}$ и в этой области справедливы неравенства

$$m \leqslant f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) \leqslant M\,,$$

то

$$m \cdot V \leqslant \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant M \cdot V\,.$$

При этом в области $\mathcal{V}$ существует такая точка с координатами (x_0, y_0, z_0), что справедлива следующая формула:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \cdot g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(x_0, y_0, z_0) \iiint\limits_{\mathcal{V}} g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

2.3. Сведение тройного интеграла к повторному

Для того, чтобы вычислять тройные интегралы, мы должны получить формулу, сводящую их к вычислению определенных интегралов подобно тому, как мы это сделали в предыдущей главе для двойных интегралов.

Пусть $P = \{(x,y,z)\,|\,a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d\,,\ g \leqslant z \leqslant h\}$ — параллелепипед в трехмерном пространстве, отнесенном к декартовой системе координат x, y, z.

Теорема 1. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в параллелепипеде P, и $\forall (x,y) \in P_{xy} = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ существует определенный интеграл Римана

$$I(x,y) = \int\limits_g^h f(x,y,z)\,dz\,,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\iint\limits_{P_{xy}} dS \int\limits_g^h f(x,y,z)\,dz \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{P_{xy}} I(x,y)\,dS\,,$$

причем выполняется равенство

$$\iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_{xy}} dS \int\limits_g^h f(x,y,z)\,dz\,.$$

Доказательство. Разобьем параллелепипед P сетью плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Тогда параллелепипед P разложится на элементарные параллелепипеды

$$P_{ijk} = \{(x,y)\,|\,x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}\,,\ y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}\,,\ z_k \leqslant z \leqslant z_{k+1}\}\,.$$

Введем числа

$$m_{ijk} = \inf_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x,y,z)\,,\ M_{ijk} = \sup_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x,y,z)\,.$$

Очевидно, что

$$m_{ijk} \leqslant f(x,y,z) \leqslant M_{ijk}\,,\ \forall (x,y,z) \in P_{ijk}\,.$$

Тогда $\forall(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j) \in [x_i,x_{i+1}] \times [y_j,y_{j+1}] = P_{ij}$ согласно теореме о среднем значении определенного интеграла имеем

$$m_{ijk}\,\Delta z_k \leqslant \int\limits_{z_k}^{z_{k+1}} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,z)\,dz \leqslant M_{ijk}\,\Delta z_k\,,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ и рассматриваемый определенный интеграл существует, так как $\exists I(x,y)$, $\forall(x,y) \in P_{xy}$. Составим суммы

$$\sum_k m_{ijk}\,\Delta z_k \leqslant I(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j) = \int\limits_g^h f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j,z)\,dz \leqslant \sum_k M_{ijk}\,\Delta z_k\,,$$

где суммы берутся по всем допустимым значениям индекса k. Умножим все части этой цепочки неравенств на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и просуммируем по всем допустимым значениям индексов i и j. Получим

$$s = \sum_{i,j,k} m_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k \leqslant \sum_{i,j} I(\tilde{x}_i,\tilde{y}_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j \leqslant \sum_{i,j,k} M_{ijk}\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k = S,$$

где слева и справа получились суммы Дарбу для тройного интеграла функции $f(x,y,z)$ по параллелепипеду P, а в центре интегральная сумма для двойного интеграла от функции $I(x,y)$ по прямоугольнику P_{xy}. При устремлении сторон всех элементарных параллелепипедов к нулю суммы Дарбу s и S устремятся к значению $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ снизу и сверху соответственно, а предел интегральной суммы для двойного интеграла от функции $I(x,y)$ по прямоугольнику P_{xy} даст значение этого интеграла

$$\iint\limits_{P_{xy}} I(x,y)\,dS = \iint\limits_{P_{xy}} dS \int\limits_g^h f(x,y,z)\,dz\,.$$

Отсюда с учетом теоремы о среднем теории пределов получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Если в полученной формуле свести двойной интеграл по области P_{xy} к повторному, как мы это делали в предыдущей главе, то окончательно можно записать формулу

$$\iiint\limits_{P} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_g^h f(x,y,z)\,dz\,,$$

причем порядок интегрирования в таком повторном интеграле можно произвольно менять.

Теперь рассмотрим случай произвольной области $\mathcal{V} \in E_3$. Отнесем пространство к прямоугольным декартовым координатам. Пусть $\mathcal{D}$ — область на координатной плоскости xy, являющаяся проекцией области $\mathcal{V}$ на эту плоскость. Рассмотрим область $\mathcal{V}$, ограниченную сверху и снизу поверхностями, являющимися графиками гладких функций $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$, определенных в области $\mathcal{D}$, а с боков цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z и проходящими через границу области $\mathcal{D}$.

Теорема 2. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in \mathcal{D}\,,\ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}\,,$$

где $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$ — гладкие функции определенные в области $\mathcal{D}$, и $\forall (x,y) \in \mathcal{D}$ существует определенный интеграл Римана

$$I(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_{\mathcal{D}} I(x,y)\,dS\,,$$

причем выполняется равенство

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} \subset P$, где

$$P = \{(x, y, z) \,|\, a \leqslant x \leqslant b\ ,\ c \leqslant y \leqslant d\ ,\ g \leqslant y \leqslant h\}\,.$$

Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & , \text{ если } (x, y, z) \in \mathcal{V}\,, \\ 0 & , \text{ если } (x, y, z) \in P \backslash \mathcal{V}\,. \end{cases}$$

Очевидно

$$\iiint\limits_P F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

так как

$$\iiint\limits_{P \backslash \mathcal{V}} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0\,.$$

При каждом $(x, y) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\int\limits_g^h F(x, y, z)\, dz = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\,.$$

По теореме 1

$$\iiint\limits_P F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dS \int\limits_g^h F(x, y, z)\, dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\,,$$

откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Если область $\mathcal{D}$ в плоскости xy имеет вид

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b\ ,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}\,,$$

то, сводя в полученной формуле двойной интеграл по области $\mathcal{D}$ к повторному также, как мы это делали в предыдущей главе, окончательно получим формулу:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\,,$$

которая называется *формулой сведения тройного интеграла к повторному.* В этой формуле подразумевается, что сначала выполняется интегрирование по z, затем интегрирование по y, а потом интегрирование по x. Таким образом, мы свели задачу вычисления тройного интеграла к задаче последовательного вычисления трех определенных интегралов.

Пример. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} xyz\,dx\,dy\,dz\,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

Решение. Область интегрирования ограничена с боков параболическими цилиндрами $y = x^2$ и $x = y^2$, снизу координатной плоскостью xy, а сверху гиперболическим параболоидом $z = xy$, поэтому, сводя тройной интеграл к повторному, будем иметь:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} xyz\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{xy} xyz\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{xy}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x^3y^3}{2}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{x^3y^4}{8}\bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^1 (x^5 - x^{11})\,dx = \frac{1}{96}\,.$$

2.4. Перемена порядка интегрирования

Рассмотрим снова замкнутую поверхность $\mathcal{S}$, ограничивающую в трехмерном евклидовом пространстве область $\mathcal{V}$. Наряду с проекцией поверхности $\mathcal{S}$ на плоскость xy, как это мы делали в предыдущем параграфе, можно рассмотреть также ее проекции на другие координатные плоскости. Проекцией поверхности $\mathcal{S}$ на плоскость xz будет некоторая плоская область $\mathcal{D}'$, а соответствующий цилиндр разделит поверхность $\mathcal{S}$ на две поверхности, задаваемые уравнениями $y = y_1(x, z)$,

$y = y_2(x, z)$. Аналогично, проекцией на плоскость yz будет некоторая плоская область $\mathcal{D}''$, поверхности же, на которые разделится поверхность $\mathcal{S}$, будут иметь уравнения $x = x_1(y, z)$, $x = x_2(y, z)$. Имея ввиду результаты предыдущего параграфа, мы теперь можем записать формулу сведения тройного интеграла к повторному во всех возможных направлениях:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}'} dx\,dz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}''} dy\,dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx\,.$$

Записывая двойные интегралы через повторные с использованием обозначений предыдущей главы, получим окончательно:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy = \int\limits_{g}^{h} dz \int\limits_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z)\,dy =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx = \int\limits_{g}^{h} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx\,,$$

где g и h — аппликаты крайних сечений тела $\mathcal{V}$ плоскостями, перпендикулярными оси z; $z = z_1(x)$ и $z = z_2(x)$, а также $x = x_1(z)$ и

$x = x_2(z)$ — функции границы области $\mathcal{D}'$; $z = z_1(y)$ и $z = z_2(y)$, а также $y = y_1(z)$ и $y = y_2(z)$ — функции границы области $\mathcal{D}''$. При решении практических задач порядок интегрирования выбирается из соображений удобства и диктуется геометрическим устройством области интегрирования $\mathcal{V}$.

2.5. Замена переменных в тройном интеграле

Подобно двойным интегралам, тройные интегралы тоже можно рассматривать относительно некоторых криволинейных координат, что во многих случаях может упростить задачу интегрирования.

Пусть $\mathcal{V}$ — область в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Введем в области $\mathcal{V}$ некоторые новые произвольные координаты u, v и w, однозначно связанные с декартовыми координатами уравнениями перехода:

$$F : \begin{cases} x = x(u, v, w)\ , \\ y = y(u, v, w)\ , \\ z = z(u, v, w)\ , \end{cases}$$

где $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ и $z = z(u, v, w)$ непрерывно дифференцируемые функции переменных u, v, w. Эти функции определяют взаимно-однозначное дифференцируемое отображение F некоторой области $\mathcal{V}'$ в пространстве, отнесенном к декартовым координатам u, v, w на область $\mathcal{V}$ в пространстве, отнесенном к декартовым координатам x, y, z, если якобиан этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

в каждой точке области $\mathcal{V}'$.

Отображение F можно также задать вектор-функцией

$$\mathbf{r} = x(u,v,w)\,\mathbf{i} + y(u,v,w)\,\mathbf{j} + z(u,v,w)\,\mathbf{k}\,.$$

Координатные линии определяются уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v_0,w_0)\;,\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v,w_0)\;,\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v_0,w)\;,$$

а координатные поверхности уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v,w_0)\;,\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v_0,w)\;,\; \mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v,w)\;,$$

где u_0, v_0, w_0 — некоторые фиксированные значения параметров.

Параметры u, v и w называются *криволинейными координатами* в области $\mathcal{V}$. Область $\mathcal{V}'$ вместе с уравнениями перехода (то есть уравнениями, задающими взаимно-однозначное дифференцируемое отображение $F\colon \mathcal{V}' \to \mathcal{V}$) называется *координатной системой* в области $\mathcal{V}$.

Выражение $dV = dx\,dy\,dz$ называется *элементом объема в прямоугольных координатах.* Нам необходимо вычислить элемент объема в криволинейных координатах.

Рассмотрим элементарный параллелепипед в области $\mathcal{V}'$ с длинами сторон Δu, Δv и Δw. При отображении F ему будет соответствовать «криволинейный параллелепипед» — малая область, ограниченная близкими координатными поверхностями криволинейной системы координат в области $\mathcal{V}$. Обозначим его объем через ΔV. Если одна из его вершин имеет криволинейные координаты (u_0,v_0,w_0), то векторы перемещения к соседним вершинам можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0+\Delta u,v_0,w_0) - \mathbf{r}(u_0,v_0,w_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0,v_0,w_0)\,\Delta u + o(\Delta u)\;,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0,v_0+\Delta v,w_0) - \mathbf{r}(u_0,v_0,w_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0,v_0,w_0)\,\Delta v + o(\Delta v)\;,$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}(u_0,v_0,w_0+\Delta w) - \mathbf{r}(u_0,v_0,w_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}(u_0,v_0,w_0)\,\Delta w + o(\Delta w)\;.$$

Очевидно, что объем ΔV с точностью до бесконечно малых высших порядков равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\Delta w$.

Из курса аналитической геометрии мы знаем, что объем V параллелепипеда, построенного на трех векторах $\mathbf{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{c}(x_3, y_3, z_3)$ выражается при помощи смешанного произведения векторов формулой:

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| = |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}|.$$

Применяя эту формулу для объема ΔV, получим:

$$\Delta V = |\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}| \, \Delta u \, \Delta v \, \Delta w \,,$$

то есть $\Delta V = |J(u, v, w)| \, \Delta u \, \Delta v \, \Delta w$.

Рассмотрим тройной интеграл от функции $\rho = f(x, y, z)$ по области $\mathcal{V}$. В декартовой системе координат по определению

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dV =$$

$$= \iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\Delta x_{max} \to 0 \\ \Delta y_{max} \to 0 \\ \Delta z_{max} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta x_i \, \Delta y_i \, \Delta z_i \,,$$

где область $\mathcal{V}$ разложена на элементарные области сетью плоскостей параллельных координатным плоскостям декартовой системы координат.

Рассмотрим теперь разбиение области $\mathcal{V}$ сетью координатных поверхностей криволинейной системы координат. По определению

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z) \, dV \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \, \Delta V_i \,.$$

Применим к каждой элементарной области формулу

$$\Delta V_i = |J(u_i, v_i, w_i)| \, \Delta u_i \, \Delta v_i \, \Delta w_i \,,$$

где предполагается, что

$$x_i = x(u_i, v_i, w_i)\ ,\ y_i = y(u_i, v_i, w_i)\ ,\ z_i = z(u_i, v_i, w_i)\ .$$

Тогда интегральная сумма принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i, w_i), y(u_i, v_i, w_i), z(u_i, v_i, w_i))\,|J(u_i, v_i, w_i)|\,du_i\,dv_i\,dw_i\ ,$$

и, очевидно, она является интегральной суммой для тройного интеграла по области $\mathcal{V}'$. Заметим, что при $\Delta V_{\max} \to 0$ будут иметь место $\Delta u_{\max} \to 0$, $\Delta v_{\max} \to 0$ и $\Delta w_{\max} \to 0$. На основании всего этого мы можем записать следующую формулу:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|J|\,du\,dv\,dw\ ,$$

которая называется *формулой замены переменных в тройном интеграле.*

Рассмотрим формулы перехода к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\ , \\ y = r\sin\varphi\ , \\ z = z\ . \end{cases}$$

Координаты r и φ — это полярные координаты на плоскости xy. Непосредственное вычисление якобиана дает:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\ .$$

Формула замены переменных в тройном интеграле принимает вид:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz\ .$$

Пример. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} z\,dx\,dy\,dz\,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=h$.

Решение. Область $\mathcal{V}$ — это круговой цилиндр радиуса a и высоты h, поэтому, переходя к цилиндрическим координатам, получим:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} z\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^a dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^h zr\,dz=$$

$$=\int\limits_0^a dr\int\limits_0^{2\pi} r\frac{z^2}{2}\bigg|_0^h d\varphi=\int\limits_0^a r\frac{h^2}{2}\varphi\bigg|_0^{2\pi} dr=\pi h^2\int\limits_0^a r\,dr=\frac{1}{2}\pi a^2h^2\,.$$

Рассмотрим теперь формулы перехода к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta\,, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z=r\cos\theta\,. \end{cases}$$

где r — длина радиус-вектора данной точки, угол φ подобен аналогичному углу полярной системы координат, а угол θ отсчитывается от положительного направления оси z до направления радиус-вектора точки и может меняться в пределах от 0 до π. Модуль якобиана этой координатной системы равен

$$|J|=r^2\sin\theta\,.$$

Формула замены переменных в тройном интеграле принимает вид:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Следует иметь ввиду, что иногда в учебной и научной литературе сферическую систему координат выбирают в другом варианте. Отличие между этим вариантом и предыдущим заключается в отсчете угла θ, который в этом случае отсчитывается не от положительного направления оси z, а от плоскости xy, причем выше плоскости углы считаются положительными по знаку, а ниже отрицательными, и, таким образом, угол θ может меняться в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$. В этом варианте выбора сферической системы координат функции перехода имеют вид:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta\ , \\ y = r\sin\varphi\cos\theta\ , \\ z = r\sin\theta \qquad\quad . \end{cases}$$

Модуль якобиана равен:

$$|J| = r^2\cos\theta\ .$$

Формула замены переменных в тройном интеграле принимает вид:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\mathcal{V}'} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta\ .$$

Пример. Перейдя к сферическим координатам, вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz\ ,$$

где область $\mathcal{V}$ — внутренность шарового сектора с центром в начале координат, радиусом a и углом при вершине 2α $(0 < \alpha < \pi)$, ось симметрии сектора — ось z.

Решение. Переходим к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta\ , \\ y = r\sin\varphi\sin\theta\ , \\ z = r\cos\theta \qquad\quad . \end{cases}$$

Внутри указанного шарового сектора координата r меняется в пределах от 0 до a, координата φ в пределах от 0 до 2π, а координата θ в пределах от 0 до α. Учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получим:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^a dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} r^3 \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^a dr \int\limits_0^{2\pi} r^3(-\cos\theta)\Big|_0^{\alpha}\, d\varphi = \int\limits_0^a r^3(1 - \cos\alpha)\varphi\Big|_0^{2\pi}\, dr =$$

$$= 2\pi(1 - \cos\alpha)\int\limits_0^a r^3\, dr = \pi a^4 \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \pi a^4 \sin^2\frac{\alpha}{2}\,.$$

2.6. Приложения тройных интегралов

1. Вычисление объемов тел произвольной формы

$$V = \iiint\limits_{\mathcal{V}} dx\, dy\, dz\,.$$

2. Вычисление массы (заряда) тела. Пусть $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность массы (заряда) неоднородного (неравномерно заряженного) тела $\mathcal{V}$. В параграфе 1 этой главы было продемонстрировано, что масса m (заряд q) тела выражается тройным интегралом

$$m\,(\text{или}\; q) = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,.$$

3. Вычисление центра масс неоднородного тела. Повторяя аналогичные рассуждения, приведенные в предыдущей главе для плоской пластины, и формулируя их здесь для тела в трехмерном пространстве, получим формулу

$$\mathbf{r}_c = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{V}} \mathbf{r}\, \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}\,,$$

то есть координаты центра масс неоднородного тела вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{V}} x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}\,,$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{V}} y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}\,,$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{\mathcal{V}} z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_{\mathcal{V}} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}\,.$$

4. Вычисление статических моментов и моментов инерции неоднородного тела. Пусть $\rho = \rho(x,y,z)$ — плотность неоднородного тела $\mathcal{V}$. Статические моменты малого элемента тела относительно координатных плоскостей соответственно равны

$$\Delta M_{yz} = x\,\Delta m = x\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,,$$

$$\Delta M_{xz} = y\,\Delta m = y\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,,$$

$$\Delta M_{xy} = z\,\Delta m = z\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,.$$

Для нахождения статических моментов тела необходимо просуммировать элементарные моменты по всему объему тела и устремить объемы всех элементарных областей к нулю. Отсюда видно, что статические моменты пластины относительно координатных плоскостей равны

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} z\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Статический момент тела относительно некоторой произвольной точки $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ будет вычисляться по формуле

$$M_{\mathbf{r}_0} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Аналогично можно получить формулы для моментов инерции тела относительно координатных осей:

$$J_{xx} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (y^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$J_{yy} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + z^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$J_{zz} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

и координатных плоскостей:

$$J_{yz} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$J_{xz} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} y^2\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

$$J_{xy} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} z^2\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

5. Задача о гравитирующем теле. Пусть $\mathcal{V}$ неоднородное массивное тело с плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$. Рассмотрим точечную массу m_0 сосредоточенную в точке $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ внешней по отношению к телу $\mathcal{V}$.

Тогда согласно закону Всемирного тяготения (Ньютона) малый элемент тела с массой $\Delta m = \rho\,\Delta V$ притягивает материальную точку m_0 с силой

$$\Delta\mathbf{F} = G\,\frac{m_0\,\Delta m}{R^3}\,\mathbf{R}\,,$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Компоненты вектора $\Delta\mathbf{F}$ равны

$$\Delta F_x = G\,\frac{m_0\,(x-x_0)\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,,$$

$$\Delta F_y = G\,\frac{m_0\,(y-y_0)\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,,$$

$$\Delta F_z = G\,\frac{m_0\,(z-z_0)\,\rho(x,y,z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,.$$

Для вычисления гравитационной силы $\mathbf{F}$, с которой тело $\mathcal{V}$ притягивает материальную точку с массой m_0 необходимо просуммировать все элементарные силы $\Delta\mathbf{F}$ и устремить объемы всех элементарных областей к нулю. В результате получим:

$$\mathbf{F} = G\,m_0 \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{R}\,\rho}{R^3}\,dV\,,$$

или покомпонентно:

$$F_x = G\,m_0 \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{(x-x_0)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,,$$

$$F_y = G\,m_0 \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{(y-y_0)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,,$$

$$F_z = G\,m_0 \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{(z-z_0)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{3/2}}\,.$$

Гравитационный (ньютоновский) потенциал в точке $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ равен

$$\Phi(x_0,y_0,z_0) = G \iiint\limits_{\mathcal{V}} \frac{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}\,.$$

При этом
$$\mathbf{F} = m_0 \operatorname{grad} \Phi \ .$$

2.7. Упражнения

1. Вычислить интегралы:

а)
$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x+y+z)\, dx\, dy\, dz\ ,$$
где область $\mathcal{V}$ — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

б)
$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2 y^3 z\, dx\, dy\, dz\ ,$$
где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $y=x$, $y=x^2$, $z=xy$, $z=0$;

в)
$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz\ ,$$
где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $z=y^2-x^2$, $z=0$, $y=1$.

2. Переменить порядок интегрирования в интеграле:
$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy \int\limits_0^{a-x-y} f(x,y,z)\, dz\ ,$$
расставив интегрирование в любом другом порядке. Рассмотрите еще какие-нибудь два варианта перемены порядка интегрирования в этом интеграле.

3. Проведите вычисление якобианов обоих вариантов сферической системы координат.

4. Вычислить интегралы, перейдя к цилиндрическим координатам:

а)

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} x^2 \, dx \, dy \, dz \,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = a^2\,,\ z = 0\,,\ z = h\,;$

б)

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} z \, dx \, dy \, dz \,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2\,,\ z = a\,.$

5. Вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам:

а)

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} xyz^2 \, dx \, dy \, dz \,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и координатными плоскостями ($x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0$);

б)

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z = 0$ ($z > 0$).

в)

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz \,,$$

где область $\mathcal{V}$ ограничена поверхностями $x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z^2 = x^2+y^2$ ($z > 0$).

3. n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Определение n-кратного интеграла

Пусть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ функция n переменных, определенная на области Ω n-мерного евклидова пространства E_n. Разложим область Ω сетью гиперповерхностей на элементарные (малые) области $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ с объемами $\Delta\Omega_1, \ldots, \Delta\Omega_m$. Выберем в каждой элементарной области Ω_i по одной произвольной точке с координатами $(\overset{(i)}{x}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}_n)$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} f(\overset{(i)}{x}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}_n)\, \Delta\Omega_i\, .$$

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} f(\overset{(i)}{x}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}_n)\, \Delta\Omega_i$$

при беспредельном уменьшении объемов $\Delta\Omega_i$ элементарных областей Ω_i и беспредельном возрастании числа m элементарных областей называется n-*кратным интегралом (Римана)* от функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ по области Ω и обозначается символом:

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega\, .$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения области Ω, ни от выбора точек $(\overset{(i)}{x}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}_n)$ внутри элементарных областей Ω_i. Итак,

$$\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\Omega_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\overset{(i)}{x}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}_n)\, \Delta\Omega_i\, ,$$

где $\Delta\Omega_{\max} = \max\limits_{i} \Delta\Omega_i$.

Замечание. Для n-кратного интеграла также используется обозначение

$$\int\limits_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, d\Omega\,,$$

где подразумевается, что символ интеграла повторен n раз. В случае небольших размерностей пространства символы интеграла явно выписываются n раз. Мы будем использовать далее это обозначение, чтобы явно выделить n-кратные интегралы. Следует однако учесть, что это обозначение в современной литературе считается устаревшим. Мы используем его здесь исключительно в эвристических целях.

Отнесем область Ω к прямоугольным координатам и допустим, что элементарные объемы $\Delta\Omega_i$ получаются путем разбиения объема всей области Ω на прямоугольные n-мерные параллелепипеды со сторонами $\Delta \overset{(i)}{x}_1, \dots, \Delta \overset{(i)}{x}_n$. Тогда мы можем написать, что $\Delta\Omega_i = \Delta \overset{(i)}{x}_1 \dots \Delta \overset{(i)}{x}_n$ для всех i. Выражение $d\Omega = dx_1 \dots dx_n$ называется *элементом объема в прямоугольных координатах.* Таким образом, определение n-кратного интеграла в прямоугольной декартовой системе координат примет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x_{1\,max} \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_{n\,max} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overset{(i)}{x}_1, \dots, \overset{(i)}{x}_n)\, \Delta \overset{(i)}{x}_1 \dots \Delta \overset{(i)}{x}_n\,,$$

где $\Delta x_{k\max} = \max\limits_i \Delta \overset{(i)}{x}_k \ \ (k = 1, \dots, n)$.

Теория n-кратного интеграла строится по той же схеме, что и теория двойного и тройного интегралов.

Определение. Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется интегрируемой по Риману в области Ω, если для нее существует n-кратный интеграл Римана по этой области.

Теорема 1. Если функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ интегрируема по Риману в области Ω, то она ограничена в этой области.

Определение. Нижняя s и верхняя S суммы Дарбу для n-кратного интеграла определяются следующим образом:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\Omega_i \, , \ S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta\Omega_i \, ,$$

где

$$m_i = \inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_i} f(x_1, \dots, x_n) \, , \ M_i = \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\Omega_i} f(x_1, \dots, x_n) \, .$$

Свойства сумм Дарбу.

1) При дальнейшем разбиении области Ω проведением новых гиперповерхностей деления, нижняя сумма Дарбу не убывает, а верхняя не возрастает.

2) Каждая нижняя сумма Дарбу не превышает каждой верхней, даже отвечающей любому другому разложению области Ω на элементарные области.

3) При данном разбиении и независимо от выбора точек $(\overset{(i)}{x}_1, \dots, \overset{(i)}{x}_n)$ будут выполняться неравенства

$$s \leqslant \sigma \leqslant S \, .$$

Определение. Нижний I_* и верхний I^* интегралы Дарбу определяются следующим образом:

$$I_* = \sup_T s \, , \ I^* = \inf_T S \, ,$$

где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям T области Ω.

Теорема 2. Для существования двойного интеграла, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta\Omega_{\max}\to 0} (S - s) = 0$$

или, что тоже

$$I_* = I^* \, .$$

Теорема 3. Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в области Ω, то она интегрируема в этой области.

Теорема 4. Если ограниченная функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в области Ω разрывы разве лишь на конечном числе гладких гиперповерхностей, то она интегрируема по Риману в этой области.

Свойства n-кратного интеграла аналогичны свойствам двойного и тройного интегралов. Предоставим формулировку и доказательство этих свойств читателю в качестве упражнения.

3.2. Сведение n-кратного интеграла к повторному

Пусть $P = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \,,\ \ldots\ ,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$ — параллелепипед в n-мерном евклидовом пространстве.

Теорема 1. Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема в параллелепипеде P и $\forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in P_{x_1 \ldots x_{n-1}}$

$$P_{x_1 \ldots x_{n-1}} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \,|\, a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1 \,,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} \leqslant x_{n-1} \leqslant b_{n-1}\}$$

существует определенный интеграл Римана

$$I(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \,,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\int\limits_{P_{x_1 \ldots x_{n-1}}}\!\!\!\ldots\!\int d\widetilde{\Omega} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{P_{x_1 \ldots x_{n-1}}}\!\!\!\ldots\!\int I(x_1, \ldots, x_{n-1})\, d\widetilde{\Omega} \,,$$

причем выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega}\!\ldots\!\int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{P_{x_1 \ldots x_{n-1}}}\!\!\!\ldots\!\int d\widetilde{\Omega} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \,,$$

где $d\widetilde{\Omega} = dx_1 \ldots dx_{n-1}$ — элемент объема в координатной гиперплоскости $x_n = 0$.

Замечание. Если в полученной формуле свести $(n-1)$-кратный интеграл по области $P_{x_1 \ldots x_{n-1}}$ к повторному, то окончательно можно записать формулу

$$\int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n\,,$$

причем порядок интегрирования в этом повторном интеграле можно произвольно менять.

Рассмотрим область вида $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{\Omega}$, $\chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, где $x_n = \chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $x_n = X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — гладкие функции определенные в области $\widetilde{\Omega}$, которая является проекцией области Ω на координатную гиперплоскость $x_n = 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема в области Ω и $\forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \widetilde{\Omega}$ существует определенный интеграл Римана

$$I(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int\limits_{\chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n\,,$$

то существует также *повторный интеграл*

$$\int \ldots \int\limits_{\widetilde{\Omega}} d\widetilde{\Omega} \int\limits_{\chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \overset{\text{def}}{=} \int \ldots \int\limits_{\widetilde{\Omega}} I(x_1, \ldots, x_{n-1})\, d\widetilde{\Omega}\,,$$

причем выполняется равенство

$$\int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int \ldots \int\limits_{\widetilde{\Omega}} d\widetilde{\Omega} \int\limits_{\chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n\,,$$

где $d\widetilde{\Omega}$ — элемент объема в координатной гиперплоскости $x_n = 0$.

Замечание. Для области Ω вида

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a \leqslant x_1 \leqslant b,\ \chi_2(x_1) \leqslant x_2 \leqslant X_2(x_1),$$

$$\chi_3(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant X_3(x_1, x_2),\ \ldots\ ,\ \chi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant X_n(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

формула сведения n-кратного интеграла к повторному принимает вид

$$\int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\chi_2(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \int\limits_{\chi_3(x_1,x_2)}^{X_3(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int\limits_{\chi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{X_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n\ ,$$

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся также, как для аналогичных теорем в теории двойных и тройных интегралов. Предоставим подробное проведение этих доказательств читателю в качестве упражнения.

3.3. Замена переменных в n-кратном интеграле

Пусть Ω — область в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Введем в области Ω некоторые новые произвольные координаты $t_1, \ldots, t_n$, однозначно связанные с декартовыми координатами уравнениями перехода:

$$F: \begin{cases} x_1 = x_1(t_1, \ldots t_n)\ , \\ x_2 = x_2(t_1, \ldots t_n)\ , \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n = x_n(t_1, \ldots t_n)\ , \end{cases}$$

где $x_i = x_i(t_1, \ldots t_n)$, $i = 1, \ldots, n$ — непрерывно дифференцируемые функции переменных $t_1, \ldots, t_n$. Эти функции определяют взаимно-однозначное дифференцируемое отображение F некоторой области Ω' в пространстве, отнесенном к декартовым координатам $t_1, \ldots t_n$ на область Ω в пространстве, отнесенном к декартовым координатам $x_1, \ldots x_n$, если якобиан этого отображения:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

в каждой точке области Ω'.

Отображение F можно также задать вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_1, \dots t_n)\, \mathbf{e}_i\,,$$

где $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$ — векторы стандартного базиса пространства E_n.

В геометрии криволинейной координатной системы можно рассматривать координатные линии, координатные поверхности разных измерений, координатные гиперповерхности.

Параметры $t_1, \dots, t_n$ называются *криволинейными координатами* в области Ω. Область Ω' вместе с уравнениями перехода (то есть уравнениями, задающими взаимно-однозначное дифференцируемое отображение $F : \Omega' \to \Omega$) называется *координатной системой* в области Ω.

По аналогии с теорией двойных и тройных интегралов можно получить формулу для элемента объема $d\Omega$ в криволинейной системе координат:

$$d\Omega = |J(t_1, \dots t_n)|\, dt_1 \dots dt_n\,,$$

а также *формулу замены переменных в* n*-кратном интеграле:*

$$\int\limits_{\Omega} \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{\Omega'} \dots \int f(x_1(t_1, \dots t_n), \dots, x_n(t_1, \dots t_n))|J(t_1, \dots t_n)|\, dt_1 \dots dt_n\,.$$

Подробный вывод этих формул предоставляем читателю в качестве упражнения.

3.4. Приложения n-кратных интегралов

1. Объемы областей в n-мерном пространстве

$$V_\Omega = \int\limits_{\Omega}\!\!\dots\!\!\int dx_1 \dots dx_n \,.$$

2. Задача о гравитирующих телах. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$ два неоднородных массивных тела с плотностями $\rho = \rho(x, y, z)$ и $\rho' = \rho'(x', y', z')$. Тогда согласно закону Всемирного тяготения (Ньютона) малый элемент первого тела с массой $\Delta m = \rho\,\Delta V$ притягивает малый элемент второго тела с массой $\Delta m' = \rho'\,\Delta V'$ с силой

$$\mathbf{\Delta F} = G\,\frac{\Delta m\,\Delta m'}{R^3}\,\mathbf{R}\,,$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Компоненты вектора $\mathbf{\Delta F}$ равны

$$\Delta F_x = G\,\frac{(x - x')\,\rho(x, y, z)\,\rho'(x', y', z')\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta x'\,\Delta y'\,\Delta z'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}\,,$$

$$\Delta F_y = G\,\frac{(y - y')\,\rho(x, y, z)\,\rho'(x', y', z')\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta x'\,\Delta y'\,\Delta z'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}\,,$$

$$\Delta F_z = G\,\frac{(z - z')\,\rho(x, y, z)\,\rho'(x', y', z')\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta x'\,\Delta y'\,\Delta z'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}\,,$$

Для вычисления гравитационной силы $\mathbf{F}$, с которой тело $\mathcal{V}$ притягивает тело $\mathcal{V}'$ необходимо просуммировать все элементарные силы $\mathbf{\Delta F}$ и устремить объемы всех элементарных областей к нулю. В результате получим, что эта сила выражается шестикратным интегралом

$$\mathbf{F} = G \iiint\!\!\!\iiint\limits_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}'} \frac{\mathbf{R}\,\rho\,\rho'}{R^3}\,dV\,dV'$$

по области $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$ в 6-мерном пространстве, или покомпонентно:

$$F_x = G \iiint\!\!\!\iiint\limits_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}'} \frac{(x - x')\,\rho(x, y, z)\,\rho'(x', y', z')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}\,,$$

$$F_y = G \iiiiiint\limits_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}'} \frac{(y-y')\,\rho(x,y,z)\,\rho'(x',y',z')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{3/2}}\,,$$

$$F_z = G \iiiiiint\limits_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}'} \frac{(z-z')\,\rho(x,y,z)\,\rho'(x',y',z')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{3/2}}\,,$$

3. В релятивистских теориях пространство событий четырехмерно. В таких теориях возникают четырехкратные интегралы по областям в пространстве-времени. Более того, в современной теоретической физике существуют различные многомерные теории, где n-кратные интегралы находят свои естественные приложения.

3.5. Несобственные кратные интегралы

В рассмотренной выше теории кратных интегралов Римана существенным является то обстоятельство, что области интегрирования — это ограниченные множества, а интегрируемые по Риману функции — это ограниченные функции на этих множествах. В противном случае интегралы Римана не существуют. В случаях, когда область интегрирования неограничена и/или функция неограничена в области интегрирования возникает необходимость ввести понятие несобственного интеграла.

Пусть $\Omega \subset E_n$ — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим в E_n последовательность открытых множеств $\{\Omega_n\} \subset E_n$, обладающих следующими свойствами:
1.

$$V_{\Omega_n} = \int\limits_{\Omega_n}\!\!\dots\!\int d\Omega < +\infty\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

то есть все множества Ω_n ограничены и имеют конечный объем;
2. замыкание каждого множества последовательности содержится в последующих элементах последовательности

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}\,;$$

3. объединение всех множеств последовательности дает множество Ω

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n = \Omega\,.$$

Пусть функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена на множестве Ω и интегрируема по Риману на любом замкнутом ограниченном подмножестве множества Ω. Рассмотрим последовательность $\{I_n\}$, где

$$I_n = \int\limits_{\Omega_n}\!\!\ldots\!\int f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega\,.$$

Определение. Если для любой последовательности $\{\Omega_n\}$ открытых множеств, обладающих свойствами 1, 2, 3 существует предел

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\Omega_n\}$, то его называют *несобственным интегралом* от функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ по множеству Ω и обозначают

$$\int\limits_{\Omega}\!\!\ldots\!\int f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega\,.$$

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае он называется *расходящимся*.

Теорема 1. Для сходимости несобственного интеграла от неотрицательной на множестве Ω функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности $\{\Omega_n\}$ открытых множеств, обладающих свойствами 1, 2, 3, была ограничена числовая последовательность $\{I_n\}$

$$I_n = \int\limits_{\overline{\Omega}_n}\!\!\ldots\!\int f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega\,.$$

Доказательство. Необходимость. Несобственный интеграл сходится, следовательно, последовательность $\{I_n\}$ сходится, и значит она ограничена.

Достаточность. Последовательность $\{I_n\}$ не убывает, так как

$$\int\limits_{\overline{\Omega}_n}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,d\Omega \leqslant \int\limits_{\Omega_{n+1}}\!\!\ldots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,d\Omega\,.$$

По условию она ограничена и, следовательно, сходится. Покажем, что любая другая такая последовательность $\{I'_n\}$ тоже сходится.

Рассмотрим последовательность $\{\Omega'_n\}$ открытых множеств, обладающих свойствами 1, 2, 3. Очевидно, что в последовательности $\{\Omega_n\}$ есть такая подпоследовательность $\{\Omega_{k_n}\}$, что $\Omega'_n \subset \Omega_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда

$$I'_n \leqslant I_{k_n} \leqslant I\,,$$

и значит $I' \leqslant I$. Аналогично из $\Omega_{i_n} \subset \Omega'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ будет следовать

$$I_{i_n} \leqslant I'_n \leqslant I'$$

и $I \leqslant I'$. Значит $I = I'$. Теорема доказана.

На практике это означает, что для сходящихся несобственных кратных интегралов достаточно провести вычисления относительно одной последовательности $\{\Omega_n\}$ со свойствами 1, 2, 3, которая выбирается из соображений удобства.

Примеры. 1. Пусть $\Omega = E_2$, $\{\mathcal{D}_n\}$ — последовательность множеств, диаметр которых стремится к бесконечности при $n \to \infty$, удовлетворяющих свойствам 1, 2, 3. В частности, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_n = E_2$. Тогда определение несобственного интеграла по всей плоскости E_2 примет вид

$$\iint\limits_{E_2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{D}_n} f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Вычислим на основе этого определения интеграл

$$\iint\limits_{E_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\,.$$

Рассмотрим последовательность $\{\mathcal{D}_n\}$, где $\mathcal{D}_n = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2<n^2\}$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n re^{-r^2}\,dr = \pi(1-e^{-n^2})\,.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{E_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \pi(1-e^{-n^2}) = \pi\,.$$

Выберем в качестве последовательности $\{\mathcal{D}_n\}$ последовательность квадратов $\mathcal{D}_n = \{(x,y)\,|\,|x|<n\,,\ |y|<n\}$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_n} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int\limits_{-n}^{n} dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2-y^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right)^2 .$$

Переходя к пределу $n\to\infty$ получим, что

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi\,.$$

Таким образом, мы получили уже знакомый нам интеграл Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

2. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена на множестве $\mathcal{D}$, но неограничена на этом множестве, и пусть $M(x_0,y_0)$ — единственная особая точка функции $z=f(x,y)$ на множестве $\mathcal{D}$. Рассмотрим последовательность множеств $\{\mathcal{D}_n\}$, где $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}\setminus\rho_n$, множества ρ_n являются окрестностями точки M, причем $\rho_n \supset \overline{\rho}_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\mathcal{D}_n = \mathcal{D}$. Тогда определение несобственного интеграла по множеству $\mathcal{D}$ от неограниченной

функции $z = f(x, y)$ примет вид

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\mathcal{D}_n} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Вычислим на основе этого определения интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,,$$

где область $\mathcal{D} : x^2 + y^2 < R^2$. Рассмотрим последовательность $\{\mathcal{D}_n\}$, где $\mathcal{D}_n = \{(x, y) \mid \dfrac{R^2}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 < R^2\}$. Тогда

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{R}{n+1}}^{R} dr = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi R n}{n+1} = 2\pi R\,.$$

Теорема 2. (Признак сравнения.) Пусть функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $y = g(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируемы по Риману на любом замкнутом ограниченном подмножестве открытого множества Ω, причем неравенства

$$0 \leqslant f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)$$

выполнены в любой точке множества Ω. Тогда
1. из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{\Omega} g(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega$;
2. из расходимости несобственного интеграла $\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega$ следует расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{\Omega} g(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega$.

Эта теорема доказывается также, как аналогичная теорема для несобственных интегралов в теории функции одной действительной переменной. Подробное проведение этого доказательства оставляем читателю в качестве упражнения.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} |f(x_1, \ldots, x_n)|\, d\Omega$.

Теорема 3. Если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Обозначим для краткости $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ и введем функции

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}\,,\ f^- = \frac{|f| - f}{2}\,.$$

Очевидно

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f|\,,\ 0 \leqslant f^- \leqslant |f|\,.$$

По признаку сравнения сходятся интегралы $\int\limits_{\Omega} f^+\, d\Omega$ и $\int\limits_{\Omega} f^-\, d\Omega$, так как по предположению теоремы сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} |f|\, d\Omega$. Отсюда в силу равенства

$$f = f^+ - f^-$$

сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega$. Теорема доказана.

Теорема аналогичная теореме 3 была справедлива для несобственных интегралов в теории функции одной действительной переменной.

Теорема 4. Если несобственный интеграл сходится, то он сходится абсолютно.

Доказательство. Покажем, что если интеграл $\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} f^+\, d\Omega$. Предположим противное, то есть, что интеграл $\int\limits_{\Omega} f^+\, d\Omega$ расходится. Рассмотрим какую-либо последовательность открытых множеств $\{\Omega_n\}$, удовлетворяющую свойствам 1, 2, 3. Поскольку $\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega$ сходится, то последовательность $\{I_n\}$

$$I_n = \int\limits_{\Omega_n} f\, d\Omega$$

сходится к конечному числу I, а последовательность $\{I_n^+\}$

$$I_n^+ = \int\limits_{\Omega_n} f^+ \, d\Omega$$

расходится, то есть $I_n^+ \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Расходимость последовательности $\{I_n^+\}$ означает, что $\forall A > 0$ сколь угодно большого и $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, что $I_{n+m}^+ - I_n^+ > A$. В частности, $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $I_{n+m}^+ - I_n^+ > n$.

Очевидно, что $\forall \Omega_n$ существует такое подмножество $\Omega_n^+ \subset \Omega_n$, что $f^+ \equiv 0$ для любой точки множества $\Omega_n \setminus \Omega_n^+$. В частности, это означает, что

$$I_n^+ = \int\limits_{\Omega_n} f^+ \, d\Omega = \int\limits_{\Omega_n^+} f^+ \, d\Omega \, .$$

Имеем цепочку вложений

$$\begin{array}{ccccccccc} \Omega_1 & \subset & \Omega_2 & \subset & \ldots & \subset & \Omega_n & \subset & \ldots \\ \cup & & \cup & & & & \cup & & \\ \Omega_1^+ & \subset & \Omega_2^+ & \subset & \ldots & \subset & \Omega_n^+ & \subset & \ldots \end{array}$$

Построим новую последовательность множеств $\{\widetilde{\Omega}_n\}$ следующим образом

$$\widetilde{\Omega}_n = \Omega_n \cup (\Omega_{n+m}^+ \setminus \Omega_n^+) \, ,$$

где номер m выбирается для каждого номера n так, что $I_{n+m}^+ - I_n^+ > n$. Очевидно, что последовательность $\{\widetilde{\Omega}_n\}$ удовлетворяет свойствам 1, 2, 3. По теореме 1 должно быть

$$\tilde{I}_n = \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} f \, d\Omega \to I \text{ при } n \to \infty \, ,$$

но с другой стороны в силу того, что интеграл $\int\limits_{\Omega} f^+ \, d\Omega$ расходится, мы видим

$$\tilde{I}_n = \int\limits_{\widetilde{\Omega}_n} f \, d\Omega = \int\limits_{\Omega_n} f \, d\Omega + \int\limits_{\Omega_{n+m}^+ \setminus \Omega_n^+} f \, d\Omega = \int\limits_{\Omega_n} f \, d\Omega + \int\limits_{\Omega_{n+m}^+ \setminus \Omega_n^+} f^+ \, d\Omega > I_n + n \, ,$$

и значит последовательность $\{\tilde{I}_n\}$ расходится вопреки предположению, что интеграл $\int\limits_{\Omega} f\,d\Omega$ сходится. Противоречие. Значит интеграл $\int\limits_{\Omega} f^{+}\,d\Omega$ сходится. Аналогично доказывается, что сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} f^{-}\,d\Omega$. Поскольку $|f| = f^{+} + f^{-}$, то значит сходится интеграл $\int\limits_{\Omega} |f|\,d\Omega$. Теорема доказана.

Замечание. Для несобственных интегралов от функций одной переменной теорема 4 неверна, то есть для них существует понятие условной сходимости, которое для несобственных кратных интегралов теряет свою содержательность ввиду истинности теоремы 4. Это связано с тем, что классические определения несобственных интегралов для функций одной переменной и определение несобственных кратных интегралов неэквивалентны. Если мы применим определение несобственных кратных интегралов к функции одного переменного, то просто получим другую теорию несобственных интегралов для функций одной переменной, отличающуюся от той, которую мы рассмотрели ранее в соответствующем разделе нашего курса.

Продемонстрируем это отличие на примере несобственного интеграла на множестве $\Omega = [a, +\infty)$. Классическое определение несобственного интеграла от функции одной переменной в этом случае:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\,.$$

Если перевести это определение на язык условий 1, 2, 3, то условие 2 будет выглядеть так

$$[a, b_n] \subset [a, b_{n+1})\,,$$

где $b_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ для обеспечения условия 3. Определение несобственного интеграла примет вид

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[a,\,b_n)} f(x)\,dx\,. \qquad (*)$$

Таким образом, левый конец у всех множеств последовательности вложенных промежутков $\{\Omega_n\} = \{[a, b_n)\}$ совпадает. Это требование содержится в самом определении несобственного интеграла. Кроме того, фактически требуется, чтобы все множества $\{\Omega_n\}$ были связны.

Условие 2 теории несобственных кратных интегралов при применении его к функции одной переменной не будет содержать условие фиксированности левого конца. Например, качестве последовательности $\{\Omega_n\}$ можно, в частности, рассматривать последовательность вложенных интервалов $\{\Omega_n\} = \{(a_n, b_n)\}$, для которой условия 2 и 3 примут вид

$$[a_n, b_n] \subset (a_{n+1}, b_{n+1})\,,$$

где $a_n \to a$ и $b_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Можно также брать более сложные примеры последовательностей $\{\Omega_n\}$, например такие, в которых каждое множество состоит из объединения непересекающихся интервалов, и, таким образом, требование связности здесь также отсутствует. Определение несобственного интеграла в этом случае запишем в виде

$$\int\limits_{[a,+\infty)} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{\Omega_n} f(x)\,dx\,,$$

где $\{\Omega_n\}$ — <u>любая</u> последовательность открытых подмножеств числовой оси, удовлетворяющая условиям 1, 2, 3, что, очевидно, не совпадает с определением (*), где эти последовательности весьма специального вида.

3.6. Упражнения

1. Вычислить n-кратные интегралы:

а)
$$\int\limits_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\,dx_1\,\ldots\,dx_n\,,$$
где $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,0\leqslant x_1\leqslant 1,\ldots,0\leqslant x_n\leqslant 1\}$ — единичный куб.

б)
$$\int\limits_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int (x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_1\,\ldots\,dx_n\,,$$
где $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1\geqslant 0\,,\,\ldots\,,\,x_n\geqslant 0\,,\,x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1\}$ — n-мерная пирамида.

в)
$$\int\limits_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int \frac{dx_1\,\ldots\,dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}\,,$$
где $\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant \frac{1}{4}\}$ — n-мерный шар.

2. Найти объемы n-мерных областей:

а) n-мерного шара радиуса R
$$\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2\}\,,$$

б) n-мерного конуса
$$\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}\leqslant\frac{x_n^2}{a_n^2}\,,\,0\leqslant x_n\leqslant a_n\}\,,$$

в) n-мерной пирамиды
$$\Omega=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_1\geqslant 0\,,\,\ldots\,,\,x_n\geqslant 0\,,\,\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant 1\}\,,$$
где $a_i>0\,,\,i=1,\ldots,n$.

3. Вычислить несобственные интегралы:

а)
$$\iint\limits_{E_2} e^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy\,,$$

б)

$$\iint\limits_{E_2} e^{-x^2-y^2} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy\ ,$$

в)

$$\iint\limits_{0 \leqslant x \leqslant y} e^{-x-y}\, dx\, dy\ ,$$

г)

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\ .$$

4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

4.1. Определение криволинейного интеграла I-го рода

Пусть в трехмерном пространстве координат x, y, z задана некоторая кривая γ в параметрическом виде:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \ , \\ y = y(t) \ , \\ z = z(t) \ , \end{cases}$$

где t — параметр кривой γ, изменяющийся в некоторых известных пределах $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$. Напомним некоторые определения из теории кривых.

Определение. Кривая γ называется *гладкой*, если определяющие кривую функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ непрерывно дифференцируемы на сегменте $[\tau_1, \tau_2]$.

Определение. Непрерывная кривая γ называется *кусочно-гладкой*, если существует такое разбиение $T = \{t_1, t_2 \ldots, t_n\}$ $(\tau_1 = t_1 \ , \ \tau_2 = t_n)$ отрезка $[\tau_1, \tau_2]$, что каждая из дуг кривой γ, заключенная между точками $\mathbf{r}(t_i)$ и $\mathbf{r}(t_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, является гладкой кривой.

Определение. Гладкая (или кусочно-гладкая) кривая γ называется *регулярной*, если $\forall t \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \neq 0 \ ,$$

то есть $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 0$.

Определение. Точка $\mathbf{r}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in [\tau_1, \tau_2]$ кривой γ называется *точкой самопересечения*, если $\exists \bar{t} \in [\tau_1, \tau_2]$, $\bar{t} \neq \tilde{t}$, что $\mathbf{r}(\tilde{t}) = \mathbf{r}(\bar{t})$.

Замечание. В точках самопересечения кривой касательный вектор к кривой не единственный.

Рассмотрим теперь задачу, приводящую к определению криволинейного интеграла I-го рода. Пусть в пространстве задана некоторая непрерывная функция трех переменных $\rho = f(x, y, z)$. Рассмотрим ограничение этой функции на некоторую гладкую регулярную кривую γ, то есть будем вычислять значения этой функции только в точках кривой: $\rho_{|\gamma} = f(x(t), y(t), z(t)) = \rho(t)$. Используя физическую аналогию, можно трактовать кривую γ как материальную нить, подвешенную в пространстве, а функцию $\rho_{|\gamma}$ как линейную плотность этой нити. Нашей задачей будет найти массу m такой неоднородной материальной нити.

Разобьем кривую γ на конечное число n малых дуг γ_i длиной Δl_i каждая. Линейную плотность внутри каждой малой дуги можно считать приблизительно постоянной. Тогда масса Δm_i участка нити с номером i будет приближенно равна:

$$\Delta m_i \approx f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i\,,$$

где (x_i, y_i, z_i) — координаты точки кривой γ, произвольно взятой внутри i-й дуги. Полная масса нити будет приближенно равна:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i\,.$$

Точность этого приближенного соотношения повышается при уменьшении элементарных длин Δl_i. При этом увеличивается число n элементарных дуг γ_i. В пределе при беспредельном уменьшении каждой из элементарных дуг γ_i и беспредельном возрастании числа n элементарных дуг γ_i равенство становится точным:

$$m = \lim_{\Delta l_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i\,,$$

где через $\Delta l_{\max}$ обозначена максимальная длина среди всех элементарных длин Δl_i.

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i$$

при беспредельном уменьшении длин Δl_i элементарных дуг γ_i и беспредельном возрастании числа n элементарных дуг называется *криволинейным интегралом I-го рода* от функции $\rho = f(x, y, z)$ по кривой γ

и обозначается символом:

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl\,.$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения кривой γ, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) внутри элементарных дуг γ_i.

Итак,

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta l_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta l_i\,.$$

Замечание. Аналогичное определение существует в любом n-мерном евклидовом пространстве E_n:

$$\int\limits_{\gamma} f(x_1,\dots,x_n)\,dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta l_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overset{(i)}{x}_1,\dots,\overset{(i)}{x}_n)\,\Delta l_i\,.$$

Основные определения и теоремы в теории криволинейного интеграла аналогичны таковым в теории кратных интегралов.

4.2. Сведение криволинейного интеграла I-го рода к определенному интегралу

Пусть в трехмерном пространстве координат x, y, z задана некоторая кривая:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \\ z = z(t)\,, \end{cases}$$

причем параметр кривой t меняется в пределах $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, где числа τ_1 и τ_2 — это значения параметра на концах кривой. Рассмотрим вновь разбиение кривой γ на элементарные дуги γ_i с длинами Δl_i соответственно. Каждой точке (x_i, y_i, z_i) кривой γ взятой внутри дуги γ_i

соответствует некоторое значение параметра t_i, в силу чего интегральную сумму для криволинейного интеграла I-го рода можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\Delta l_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta l_i = \lim_{\Delta l_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\,\Delta l_i.$$

В силу малости элементарных дуг γ_i их можно считать прямолинейными отрезками. Тогда длины Δl_i можно выразить по теореме Пифагора через проекции Δx_i, Δy_i и Δz_i дуги γ_i на координатные оси x, y и z соответственно:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}\,.$$

Далее длины Δl_i можно выразить через соответствующее изменение Δt_i параметра t. Умножим и разделим выражение для Δl_i на число Δt_i, а в знаменателе занесем это число под корень. Получится следующее выражение:

$$\Delta l_i = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(\Delta z_i)^2}{(\Delta t_i)^2}}\,\Delta t_i\,.$$

Подставим это выражение в интегральную сумму для криволинейного интеграла I-го рода:

$$\lim_{\Delta l_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\,\Delta l_i =$$

$$= \lim_{\Delta t_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x(t_i),y(t_i),z(t_i))\,\sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta t_i)^2} + \frac{(\Delta z_i)^2}{(\Delta t_i)^2}}\,\Delta t_i\,,$$

где мы учли, что при $\Delta t_i \to 0$ имеет место стремление $\Delta l_i \to 0$. Полученная интегральная сумма является интегральной суммой для определенного интеграла:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt\,.$$

Таким образом, мы получили следующую формулу:

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(x(t),y(t),z(t))\,\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,,$$

которая называется *формулой сведения криволинейного интеграла I-го рода к определенному интегралу* и служит для вычисления криволинейных интегралов I-го рода в конкретных задачах.

Выражение

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,,$$

называется *элементом длины кривой.*

Пример. Найти массу дуги винтовой линии

$$\gamma: \begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = a\sin t\,, \\ z = h\,t \quad\;\;, \end{cases}$$

от точки $(a,0,0)$ до точки $(a,0,2\pi h)$, если плотность ρ в каждой ее точке выражается формулой $\rho = kt^2$ $(k>0)$.

Решение. Точке $(a,0,0)$ отвечает значение параметра $t=0$, а точке $(a,0,2\pi h)$ — значение параметра $t=2\pi$. Элемент длины данной кривой вычисляется по общей формуле, при подстановке в которую конкретных функций задачи получим следующее выражение:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt = \sqrt{a^2+h^2}\,dt\,.$$

Масса этой кривой вычисляется через криволинейный интеграл I-го рода:

$$m = \int\limits_{\gamma} \rho\,dl = \int\limits_{0}^{2\pi} kt^2\sqrt{a^2+h^2}\,dt = \frac{8}{3}\pi^3 k\sqrt{a^2+h^2}\,.$$

4.3. Криволинейный интеграл I-го рода на плоскости

Пусть теперь кривая γ задана на плоскости с декартовыми координатами x, y

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \, , \\ y = y(t) \, , \end{cases}$$

$(\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2)$, и, кроме того, задана некоторая функция двух переменных $\rho = f(x, y)$. Тогда по аналогии с предыдущим параграфом криволинейный интеграл I-го рода от функции $f(x, y)$ по кривой γ в пространстве двух измерений будет вычисляться по формуле:

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y) \, dl = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \, ,$$

а элемент длины плоской кривой имеет вид:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \, .$$

Приведенная выше формула пригодна для вычислений в случае, когда кривая γ задана в параметрическом виде. Однако кривая на плоскости может быть задана явным уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. В этом случае формула для вычисления криволинейного интеграла I-го рода будет иметь вид:

$$\int\limits_{\gamma} f(x, y) \, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx \, ,$$

где переменная x играет роль параметра кривой.

Выражение для элемента длины в этом случае принимает следующую форму:

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx \, .$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл I-го рода:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{y}{\sqrt{1 + 4x^2}} \, dl \, ,$$

где кривая γ — это участок параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

Решение. Поскольку

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx\,,$$

имеем:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{y}{\sqrt{1 + 4x^2}}\, dl = \int\limits_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}\,.$$

4.4. Определение криволинейного интеграла II-го рода

Пусть снова в трехмерном пространстве координат x, y, z задана некоторая кривая:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \\ z = z(t)\,, \end{cases}$$

с изменением параметра t в пределах $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$. И пусть задана некоторая вектор-функция:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}\,,$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — векторы стандартного базиса трехмерного пространства. Таким образом, вектор-функция сопоставляет каждой точке трехмерного пространства некоторый вектор $\mathbf{F}$ с декартовыми координатами $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Определение. Если каждой точке некоторой области пространства сопоставлен вектор, то говорят, что в этой области задано векторное поле.

Дадим определение ориентированной кривой, важное для построения теории криволинейных интегралов II-го рода. Если точка, отвечающая параметру t, движется по кривой γ в направлении от конца, отвечающего значению параметра τ_1, к концу, отвечающему значению параметра

τ_2, то говорят, что она движется в направлении возрастания параметра t. Если же точка движется по кривой γ в направлении от τ_2 к τ_1, то она перемещается в противоположном направлении. Поэтому на кривой γ существуют два направления обхода: одно определяется возрастанием параметра t, другое его убыванием.

Определение. Кривая, на которой выбрано одно из двух возможных направлений обхода, называется *ориентированной кривой.*

Если γ — ориентированная кривая, то через $-\gamma$ будем обозначать кривую, на которой выбрано противоположное направление обхода.

Рассмотрим некоторую вектор-функцию $\mathbf{F}(x, y, z)$ вдоль некоторой ориентированной кривой γ. Для определенности выберем направление обхода по кривой γ в направлении возрастания ее параметра t. Используя физическую аналогию, можно трактовать кривую γ как траекторию (путь) материальной точки, параметр t как время, а векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ как поле некоторой физической силы. Нашей задачей будет определить работу силы $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки из одного конца пути γ в другой.

Разобьем путь γ на малые дуги γ_i длины Δl_i подобно тому, как мы это делали при рассмотрении криволинейного интеграла I-го рода. Отличие будет состоять в том, что теперь нам важно рассматривать ориентированную кривую. Для криволинейного интеграла I-го рода ориентация кривой не имела значения. Теперь же мы рассматриваем ориентированную кривую γ, что отражает факт перемещения материальной точки в определенном направлении. Поэтому элементарные длины ориентированной кривой — это векторные величины, направленные в направлении выбранной ориентации. Вектор перемещения по i-ой элементарной дуге ориентированной кривой γ обозначим $\mathbf{\Delta l}_i$. Силу $\mathbf{F}$ при малом перемещении $\mathbf{\Delta l}_i$ можно считать приблизительно постоянной, поэтому работа ΔA_i на i-ом малом участке пути будет приближенно равна:

$$\Delta A_i \approx \text{Пр}_{\mathbf{\Delta l}_i} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)\, \Delta l_i \,,$$

где $\text{Пр}_{\mathbf{\Delta l}_i}\mathbf{F}$ — проекция вектора $\mathbf{F}$ на направление вектора $\mathbf{\Delta l}_i$, касательное к кривой γ; Δl_i — длина элементарного пути, равная модулю вектора $\mathbf{\Delta l}_i$ перемещения на любом i-ом отрезке пути; (x_i, y_i, z_i) — координаты точки кривой γ, произвольно взятой внутри i-го отрезка пути. Здесь мы учли тот факт, что только касательная составляющая силы будет совершать работу, поэтому мы и берем проекцию силы на направление касательной к кривой. Из курса аналитической геометрии мы знаем, что проекция вектора на выбранное направление равна:

$$\text{Пр}_{\mathbf{\Delta l}_i}\mathbf{F} = F\cos\alpha_i\,,$$

где α_i — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{\Delta l}_i$, F — длина вектора $\mathbf{F}$. Используя это выражение в формуле для работы ΔA_i на i-ом малом участке пути, получим:

$$\Delta A_i \approx F(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i\,\cos\alpha_i = (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{\Delta l}_i)\,,$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение соответствующих векторов.

Работа A на всем пути γ будет приближенно равна:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{\Delta l}_i)\,.$$

Точность этого приближенного соотношения можно повысить уменьшением элементарных перемещений $\mathbf{\Delta l}_i$, увеличивая, таким образом, число n элементарных областей. В пределе при беспредельном уменьшении каждого из векторов $\mathbf{\Delta l}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных дуг γ_i равенство становится точным:

$$A = \lim_{\Delta l_{max}\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{\Delta l}_i)\,.$$

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{\Delta l}_i)$$

при беспредельном уменьшении векторных элементов $\mathbf{\Delta l}_i$ и беспредельном возрастании числа n элементарных дуг γ_i называется *криволинейным интегралом II-го рода* от вектор-функции $\mathbf{F}(x, y, z)$ по ориентированной кривой γ и обозначается символом:

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dl}) \, .$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения кривой γ, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) внутри элементарных дуг γ_i.

Итак,

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dl}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Delta l_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{\Delta l}_i) \, .$$

Здесь вектор $\mathbf{dl}$ — это вектор бесконечно малого перемещения вдоль кривой γ, координаты которого являются бесконечно малыми смещениями dx, dy и dz вдоль координатных осей, то есть

$$\mathbf{dl} = (dx)\,\mathbf{i} + (dy)\,\mathbf{j} + (dz)\,\mathbf{k} \, .$$

Вычислив скалярное произведение вектор-функции $\mathbf{F}(x, y, z)$ на вектор $\mathbf{dl}$, получим:

$$(\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dl}) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \, ,$$

а векторное определение криволинейного интеграла II-го рода можно переписать в координатном виде:

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dl}) = \int\limits_{\gamma} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \, .$$

Замечание 1. Важно отметить, что кривая γ в криволинейном интеграле II-го рода — это ориентированная кривая. Если на кривой γ выбрать противоположное направление ориентации кривой, то знак криволинейного интеграла II-го рода изменится, то есть

$$\int\limits_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \, .$$

Замечание 2. Определение криволинейного интеграла II-го рода в n-мерном евклидовом пространстве E_n:

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{dl}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta l_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}(\overset{(i)}{x}{}_1, \ldots, \overset{(i)}{x}{}_n), \Delta \mathbf{l}_i) ,$$

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n), \mathbf{dl}) = \int\limits_{\gamma} F_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \cdots + F_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n .$$

Теория криволинейных интегралов II-го рода строится аналогично теориям кратных интегралов и криволинейных интегралов I-го рода.

4.5. Сведение криволинейного интеграла II-го рода к определенному интегралу

Рассмотрим вновь разбиение кривой γ на малые дуги γ_i с длинами Δl_i. Каждой точке (x_i, y_i, z_i) кривой γ внутри i-ой дуги соответствует некоторое значение параметра t_i, в силу чего интегральную сумму для криволинейного интеграла II-го рода можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\gamma} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dl}) = \lim_{\Delta t_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \frac{\Delta \mathbf{l}_i}{\Delta t_i})\, \Delta t_i =$$

$$= \lim_{\Delta t_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + Q(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} + \right.$$

$$\left. + R(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i ,$$

где мы дополнительно умножили и разделили каждое слагаемое в получившемся выражении на Δt_i и воспользовались тем фактом, что если $\Delta t_i \to 0$, то и $\Delta \mathbf{l}_i \to 0$. Полученная интегральная сумма является интегральной суммой для определенного интеграла:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t))\, dt,$$

где пределы интегрирования τ_1 и τ_2 ставятся в соответствии с выбранным направлением обхода на ориентированной кривой γ. Таким образом, мы получили следующую формулу:

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\,dt,$$

которая называется *формулой сведения криволинейного интеграла II-го рода к определенному интегралу.* Эта формула служит для вычисления криволинейных интегралов II-го рода.

Пример. Найти работу силового поля $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки по первому витку винтовой линии

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = a\sin t\,, \\ z = h\,t \qquad , \end{cases}$$

в направлении возрастания параметра t.

Решение. Начальной точке пути соответствует значение параметра $t = 0$, а конечной точке значение параметра $t = 2\pi$. Работа силового поля вычисляется при помощи криволинейного интеграла II-го рода:

$$A = \int\limits_{\gamma} -y\,dx + x\,dy + z\,dz =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (-a\sin t(a\cos t)' + a\cos t(a\sin t)' + ht(ht)')\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} (a^2 + h^2 t)\,dt = 2\pi(a^2 + \pi h^2)\,.$$

4.6. Криволинейный интеграл II-го рода на плоскости

Пусть на плоскости с координатами x, y задана кривая:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases}$$

параметр которой меняется в интервале $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$, а также пусть задана некоторая вектор-функция $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$. Тогда по аналогии с трехмерным случаем, изложенном в предыдущем параграфе криволинейный интеграл II-го рода от вектор-функции $\mathbf{F}(x,y)$ по кривой γ в пространстве двух измерений будет вычисляться по формуле:

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))\,dt\,.$$

Эта формула пригодна для вычислений в случае, когда кривая γ задана в параметрическом виде. В случае кривой, заданной явным уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, формула для вычисления криволинейного интеграла II-го рода будет иметь вид:

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))\,dx\,,$$

где порядок пределов интегрирования ставится в соответствии с выбранным направлением ориентации кривой γ.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода:

$$\int\limits_{\gamma} xy\,dx + \frac{y}{x^2}\,dy\,,$$

где кривая γ — это участок параболы $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

Решение. Поскольку $y'(x) = 2x$, то, пользуясь соответствующей формулой для вычисления криволинейного интеграла II-го рода, будем иметь:

$$\int\limits_{\gamma} xy\,dx + \frac{y}{x}\,dy = \int\limits_{0}^{2} (x^3 + 2x)\,dx = 8\,.$$

4.7. Потенциальное векторное поле

Определение. Векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}\,,$$

называется *потенциальным*, если существует такая дифференцируемая функция $U = U(x,y,z)$, что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\ Q = \frac{\partial U}{\partial y}\,,\ R = \frac{\partial U}{\partial z}\,,$$

для всех точек области определения поля. Функция $U(x,y,z)$ называется *потенциалом* векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)$.

Очевидно, что если функция $U(x,y,z)$ является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)$, то $U(x,y,z) + C$ $(C = \text{const})$ тоже является потенциалом этого векторного поля.

Теорема 1. Для того, чтобы дифференцируемое векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}\,,$$

было потенциальным, необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

для всех точек области определения поля.

Доказательство. Пусть функция $U(x,y,z)$ является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)$, тогда:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\ Q = \frac{\partial U}{\partial y}\,,\ R = \frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

Из дифференцируемости векторного поля следует, что функция потенциала $U(x,y,z)$ дважды дифференцируема. Отсюда имеем:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\,, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Для векторного поля

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$$

на плоскости условия потенциальности имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Теорема 2. Пусть задано потенциальное векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

и $U = U(x,y,z)$ — его потенциал. Пусть γ — ориентированная кривая, соединяющая две точки с координатами (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) соответственно. Направление ориентации кривой γ выбрано в направлении от первой точки ко второй. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = U(x_2,y_2,z_2) - U(x_1,y_1,z_1)\,,$$

то есть криволинейный интеграл второго рода от потенциального векторного поля не зависит от кривой γ, соединяющей две точки (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2), а зависит только от выбора самих этих точек.

Доказательство. Пусть кривая γ задана в параметрическом виде:

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \\ z = z(t)\,, \end{cases}$$

и $(x_1, y_1, z_1) = (x(\tau_1), y(\tau_1), z(\tau_1))$, $(x_2, y_2, z_2) = (x(\tau_2), y(\tau_2), z(\tau_2))$. По условию теоремы функция $U(x, y, z)$ является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$, поэтому

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \; Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \; R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вычислим криволинейный интеграл II-го рода от потенциального векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$. Сводя его к определенному интегралу, получим:

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z)\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z)\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{dt}(U(x(t), y(t), z(t)))\,dt =$$

$$= U(x(\tau_2), y(\tau_2), z(\tau_2)) - U(x(\tau_1), y(\tau_1), z(\tau_1)) =$$

$$= U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Теорема доказана.

4.8. Формула Грина. Условия потенциальности векторного поля на плоскости

В этом параграфе мы установим связь между двойными интегралами и криволинейными интегралами II-го рода на плоскости. Введем несколько предварительных понятий.

Определение. Кривая γ называется *замкнутой*, если точки ее концов совпадают.

Определение. Замкнутая кривая называется *замкнутым контуром.*

Для того, чтобы отличать замкнутые контуры от обычных кривых, мы будем обозначать их символом C.

Определение. Замкнутый контур без самопересечений называется *простым замкнутым контуром.*

Определение. Множество $\mathcal{D} \subset \mathsf{E}_2$ называется связным, если для любых двух точек этого множества существует непрерывная кривая γ, лежащая в этом множества $(\gamma \subset \mathcal{D})$ и соединяющая эти точки.

Определение. Открытое связное множество называется *областью.*

Очевидно, что если простой замкнутый контур C лежит на плоскости, то он ограничивает некоторую плоскую область $\mathcal{D}$. В этом случае замкнутый контур C называется *границей области* $\mathcal{D}$, а область $\mathcal{D}$ называется *внутренностью* контура C. При этом пишут $\mathsf{C} = \partial\mathcal{D}$.

Определение. Множество $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ называется *замкнутой областью* (или *замыканием области* $\mathcal{D}$).

Определение. Плоская область $\mathcal{D}$ называется *односвязной*, если внутренность любого простого замкнутого контура C, лежащего в области $\mathcal{D}$ $(\mathsf{C} \subset \mathcal{D})$ содержится в $\mathcal{D}$.

Суть этого определения в том, что у односвязной области нет "дыр", то есть все точки, лежащие внутри границы односвязной области принадлежат этой области.

Определение. Плоская область $\mathcal{D}$ называется *элементарной относительно координатных осей*, если она целиком содержит любой прямой отрезок, параллельный одной из координатных осей, концы которого есть точки, принадлежащие этой области.

Суть этого определения в том, что граница области элементарной относительно координатных осей может быть разложена на две непрерывные кривые, одна из которых проходит всегда выше точек области, а другая всегда ниже и такое разбиение можно сделать как относительно оси x, так и относительно оси y.

Пусть $\mathcal{G}$ — область на плоскости E_2 с введенной на ней прямоугольной декартовой системой координат x, y, и пусть $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ — элементарная относительно координатной оси y область плоскости, а C — замкнутый контур, являющийся границей этой области $(C = \partial\mathcal{D})$. Абсциссы крайних точек области в направлении оси x обозначим через a и b. Контур C состоит, вообще говоря, из четырех частей: нижней γ_1, верхней γ_3 и двух боковых γ_2 и γ_4. Для каждой из этих частей можно записать свое уравнение кривой γ_1: $y = y_1(x)$, γ_3: $y = y_2(x)$, а боковые являются отрезками прямых $x = a$, $x = b$. Таким образом,

$$\overline{\mathcal{D}} = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

$$C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 .$$

Выберем на замкнутом контуре C направление обхода так, чтобы при движении по нему внутренние точки области $\mathcal{D}$ оставались слева. Такое направление на контуре называется положительным, а противоположное направление называется отрицательным. В случае положительного направления на контуре, положительным направлением на кривой γ_1 будет направление от конца с абсциссой a к концу с абсциссой b, а положительное направление на кривой γ_3 наоборот от конца с абсциссой b к концу с абсциссой a.

Пусть теперь в области $\mathcal{G}$ заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие в этой области непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Покажем, что для области $\mathcal{D}$ элементарной относительно координатной оси y справедливо следующее равенство:

$$\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\oint\limits_{C} P\, dx ,$$

а для области $\mathcal{D}$ элементарной относительно координатной оси x справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint\limits_{C} Q\, dy\ ,$$

где символом $\oint\limits_{C}$ обозначен криволинейный интеграл II-го рода по замкнутому контуру C. Докажем первое из этих равенств. Вычислим двойной интеграл, стоящий в левой части равенства:

$$\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))\, dx = \int\limits_{a}^{b} P(x, y_2(x))\, dx - \int\limits_{a}^{b} P(x, y_1(x))\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\gamma_3} P\, dx - \int\limits_{\gamma_1} P\, dx = -\int\limits_{\gamma_3} P\, dx - \int\limits_{\gamma_1} P\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\gamma_1} P\, dx - \int\limits_{\gamma_2} P\, dx - \int\limits_{\gamma_3} P\, dx - \int\limits_{\gamma_4} P\, dx = -\oint\limits_{C} P\, dx\ ,$$

где мы учли, что

$$\int\limits_{\gamma_2} P\, dx = \int\limits_{\gamma_4} P\, dx = 0\ .$$

Второе равенство доказывается аналогично, только в этом случае разбиение границы надо будет делать относительно другой оси.

Если область $\mathcal{D}$ элементарна относительно обеих координатных осей, то, вычитая из второго равенства первое, получим следующую формулу:

$$\oint\limits_{C} P\, dx + Q\, dy = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy\ ,$$

которая называется *формулой Грина*. При доказательстве этой формулы мы существенно пользовались элементарностью области относительно осей декартовой системы координат. Покажем, что формула Грина верна для областей более общего вида.

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в односвязной области $\mathcal{G}$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Пусть, кроме того, замкнутая область $\overline{\mathcal{D}}$, ограниченная контуром $C \subset \mathcal{G}$, может быть разбита на конечное число замкнутых областей, элементарных относительно обеих координатных осей декартовой системы координат. Тогда имеет место формула Грина

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{D}} = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{D}}_i$, где $\overline{\mathcal{D}}_i$ — области элементарные относительно координатных осей. Тогда по доказанному и в силу односвязности области $\mathcal{G}$ для каждой из облатей $\overline{\mathcal{D}}_i$ справедлива формула Грина

$$\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{C_i} P\,dx + Q\,dy\,,$$

где $C_i = \partial \overline{\mathcal{D}}_i$. Отсюда

$$\iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{C_i} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy\,,$$

где последнее равенство получается в силу того, что части контуров C_i, находящиеся внутри области $\overline{\mathcal{D}}$ проходятся дважды в противоположных направлениях, поэтому криволинейные интегралы II-го рода по этим частям контуров при суммировании взаимно уничтожаются. Теорема доказана.

Формула Грина устанавливает связь между двойным интегралом по области и криволинейным интегралом II-го рода по границе области.

Рассмотрим теперь условия, при которых векторное поле на плоскости будет потенциальным. Пусть $\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$ непрерывное векторное поле в области $\mathcal{D}$.

Теорема 1. Для того, чтобы непрерывное в области $\mathcal{D}$ векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$$

было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy$$

не зависел от кривой γ, соединяющей любые две фиксированные точки области.

Эту теорему можно сформулировать также в следующей эквивалентной формулировке.

Теорема 1. Для того, чтобы непрерывное в области $\mathcal{D}$ векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$$

было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру $C \subset \mathcal{D}$ был равен нулю:

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy = 0\,.$$

Доказательство. Доказательство необходимости условия, сформулированного в этой теореме, приведено в предыдущем параграфе. Докажем достаточность.

Пусть точка с координатами (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка, а (x,y) — координаты произвольной точки области $\mathcal{G}$; $\gamma \subset \mathcal{G}$ —

кусочно-гладкая регулярная кривая, соединяющая эти точки. По условию теоремы формула

$$U(x,y)=\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy$$

определяет однозначную функцию в области $\mathcal{G}$. Покажем, что функция $U(x,y)$ является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}$. Действительно, при достаточно малом Δx формулу для приращения этой функции по переменной x можно записать в виде

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=$$

$$=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy\,,$$

где первый и последний интеграл вычисляются по кривой γ, а средний по отрезку, параллельному оси x. Поэтому

$$U(x+\Delta x,y)-U(x,y)=\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx=P(x+\theta\,\Delta x,y)\,\Delta x\,,\ (0<\theta<1)\,,$$

где в последнем равенстве мы применили теорему о среднем значении интеграла. Из полученной формулы следует

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\,\Delta x,y)=P(x,y)\,.$$

Аналогично доказывается $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$. Поскольку функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области $\mathcal{G}$, то и частные производные $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ тоже непрерывны в этой области. Следовательно, функция $U(x,y)$ дифференцируема в области $\mathcal{G}$ и является потенциалом векторного поля $\mathbf{F}=P\,\mathbf{i}+Q\,\mathbf{j}$. Теорема доказана.

Пусть теперь область $\mathcal{D}$ односвязна, а поле $\mathbf{F}(x,y)$ непрерывно дифференцируемо в области $\mathcal{D}$.

Теорема 2. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое в односвязной области $\mathcal{D}$ векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$$

было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в области $\mathcal{D}$ выполнялось равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость условия этой теоремы была доказана в предыдущем параграфе. Докажем достаточность.

Пусть $C \subset \mathcal{D}$ — простой замкнутый контур, ограничивающий замкнутую область $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{G}$, для которой справедлива формула Грина. Тогда в силу условия (1) имеем

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\overline{\mathcal{D}}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0\,.$$

В частности, это верно в случае, если C — замкнутая ломаная линия без самопересечений.

Пусть C — замкнутая ломаная, имеющая самопересечения. Тогда ее можно разбить на конечное число замкнутых ломаных без самопересечений и прямолинейных отрезков, проходимых дважды в противоположных направлениях. Криволинейный интеграл $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy$ в этом случае равен сумме интегралов по замкнутым ломаным без самопересечений и прямолинейным отрезкам. Криволинейные интегралы по замкнутым ломаным равны нулю в силу сказанного выше, а по отрезкам из-за их прохождения дважды в противоположных направлениях. Эти слагаемые взаимно уничтожаются. Следовательно, интеграл

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

и в случае ломаных с самопересечениями. Таким образом, криволинейный интеграл II-го рода при выполнении условий теоремы не зависит от ломаной, соединяющей какие-либо две точки области $\mathcal{G}$. Очевидно, любые две точки можно соединить ломаной, поэтому формула

$$U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy\,,$$

где интеграл берется по ломаной, соединяющей две точки с координатами (x_0,y_0) и (x,y), определяет однозначную функцию в области $\mathcal{G}$. Так же как и в предыдущей теореме доказывается, что она является потенциалом векторного поля $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Теорема доказана.

Отметим, что приведенные в этом параграфе теоремы содержат более сильные утверждения (необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля на плоскости), чем в предыдущем (только необходимые условия).

Отметим также, что требование односвязности области $\mathcal{D}$ при формулировке теоремы 2 весьма существенно. В качестве примера рассмотрим векторное поле:

$$\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}\,,$$

которое непрерывно дифференцируемо во всех точках плоскости, кроме точки $(0,0)$. Это видно из рассмотрения частных производных компонент этого поля:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Такое векторное поле будет потенциальным в любой односвязной области плоскости, не содержащей точку $(0,0)$ и не будет потенциальным в области, содержащей точку $(0,0)$. Мы не можем рассматривать это поле в этой точке, поэтому эту точку необходимо будет исключить из рассмотрения (выколотая точка), в силу чего области, окаймляющие эту точку, становятся неодносвязными. Например, криволинейный интеграл по окружности радиуса R ($x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$) с центром в начале координат отличен от нуля:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0\,,$$

и значит по теореме 1 рассматриваемое поле не потенциально в области, ограниченной этой окружностью.

4.9. Упражнения

1. Вычислить криволинейный интеграл I-го рода:

$$\int\limits_\gamma y^2\,dl\,,$$

где γ — арка циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

2. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первом квадранте, если плотность ее в каждой точке пропорциональна абсциссе этой точки $(\rho = kx)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода от вектор-функции $\mathbf{F}(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$ по кривой $\gamma\colon\ y = x^2$ от точки $(0,0)$ до точки $(1,1)$.

4. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода от вектор-функции $\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ по кривой

$$\gamma : \begin{cases} x = t\ \ , \\ y = t^2\,, \\ z = t^3\,, \end{cases}$$

от точки, отвечающей значению параметра $t = 0$, до точки, отвечающей значению параметра $t = 1$.

5. Вычислить работу силового поля $\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - x^2\,\mathbf{k}$ при перемещении материальной точки вдоль сечения однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ плоскостью $y = x$ от точки $(a,a,0)$ до точки $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$.

6. Используя формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{C} (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy \,,$$

где C — замкнутый контур, образованный полуокружностью определяемой уравнением $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и замыкающим ее отрезком, расположенном на оси x.

5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Поверхность в трехмерном евклидовом пространстве

Рассмотрим отображение некоторой плоской области $\mathcal{D}$ двумерного пространства координат u и v в трехмерное евклидово пространство декартовых координат x, y, z.

Определение. Непрерывное отображение

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x = x(u,v)\ , \\ y = y(u,v)\ , \\ z = z(u,v)\ , \end{cases}$$

плоской области $\mathcal{D}$ в трехмерное евклидово пространство называется *поверхностью.* Здесь $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ и $z = z(u,v)$ — непрерывные функции, $(u,v) \in \mathcal{D}$.

Область $\mathcal{D}$ называется *системой координат поверхности*, а переменные u и v называются *координатами* или *параметрами* на поверхности $\mathcal{S}$.

Поверхность представленная через свои параметры называется поверхностью, заданной в параметрическом виде. В предыдущих главах мы задавали поверхности другим способом, а именно явным уравнением $z = z(x,y)$. На практике это две альтернативные формы аналитического описания поверхностей, но следует учесть, что явная форма по сути является частным случаем параметрической (координаты x и y взяты в качестве параметров поверхности).

Определение. Поверхность $\mathcal{S}$ называется *гладкой*, если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области $\mathcal{D}$.

Определение. Гладкая поверхность $\mathcal{S}$ называется *регулярной*, если в любой точке $(u,v) \in \mathcal{D}$ ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

равен двум.

Параметрические уравнения поверхности $\mathcal{S}$ можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)\ ,$$

где $\mathbf{r} = (x,y,z)$ — радиус-вектор точки в трехмерном евклидовом пространстве, $\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}$.

Кривые $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v_0)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0,v)$ ($u_0 = \mathrm{const}$, $v_0 = \mathrm{const}$) называются *координатными линиями* поверхности. Координатные линии на регулярной поверхности являются регулярными кривыми и образуют на поверхности координатную сеть. Векторы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ и } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

касательные к координатным линиям называются *касательными векторами* к поверхности. Если поверхность регулярна, то эти векторы линейно-независимы.

Далее рассматриваем только гладкие регулярные поверхности.

Пусть $\Gamma:\ u = u(t),\ v = v(t)\ \ (\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2)$ — гладкая регулярная кривая без самопересечений, лежащая в координатной области $\mathcal{D}$ поверхности $\mathcal{S}$, проходящая через точку $(u_0,v_0) \in \mathcal{D}$, где $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$, $\tau_1 \leqslant t_0 \leqslant \tau_2$. Тогда $\gamma:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t),v(t))\ \ (\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2)$ — гладкая регулярная кривая без самопересечений, лежащая на поверхности $\mathcal{S}$ и проходящая через точку $\mathbf{r}(u_0,v_0)$. Вектор касательный к этой кривой

$$\dot{\mathbf{r}} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\dot{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\dot{v}\,, \tag{1}$$

причем $|\dot{\mathbf{r}}| \neq 0$, так как $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 > 0$ (регулярность кривой Γ в области $\mathcal{D}$), а векторы $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ линейно независимы. Из формулы (1) следует, что касательный вектор к кривой γ, лежащей на поверхности $\mathcal{S}$, в точке $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ является линейной комбинацией векторов $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(x_0, y_0)$ и $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(x_0, y_0)$, то есть лежит в плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ параллельно векторам $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$. Эта плоскость называется *касательной плоскостью к поверхности* $\mathcal{S}$ *в точке* $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Все векторы лежащие в этой плоскости, то есть все векторы вида (1), называются *касательными векторами к поверхности* в данной точке.

Вектор нормали касательной плоскости

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$$

называется *вектором нормали поверхности* в соответствующей точке.

Уравнение касательной плоскости в точке $\mathbf{r}(u_0, v_0)$

$$(\mathbf{N}(u_0, v_0), \mathbf{R} - \mathbf{r}(u_0, v_0)) = 0\,,$$

где $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ — радиус-вектор точек касательной плоскости. Уравнение касательной плоскости в координатной форме

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0, v_0) & Y - y(x_0, y_0) & Z - z(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Длина кривой на поверхности:

$$l = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\mathbf{r}}|\, dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}})}\, dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\dot{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\dot{v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\dot{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\dot{v}\right)}\, dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt\,,$$

где

$$E(u,v)=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right)\ ,\ F(u,v)=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\ ,\ G(u,v)=\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\ -$$

коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. Тогда модуль вектора нормали будет равен:

$$|\mathbf{N}(u,v)|=|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v),\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right]|=\sqrt{EG-F^2}\,.$$

Рассмотрим площадь dS малого участка поверхности, заключенного между бесконечно близкими координатными кривыми. С точностью до бесконечно малых высших порядков она равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv$. Непосредственное вычисление этой площади приводит к следующему результату:

$$dS=|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du,\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv\right]|=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,.$$

Определение. Выражение $dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$ называется *элементом площади поверхности* $\mathcal{S}$.

Определение. *Площадью поверхности* $\mathcal{S}$ называется число:

$$S=\iint\limits_{\mathcal{D}}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,.$$

В заключение приведем сводку формул для случая, когда гладкая поверхность $\mathcal{S}$ задана явным уравнением $z=z(x,y)$. В этом случае координаты x и y играют роль параметров поверхности $((x,y)\in\mathcal{D})$, и мы получим следующие формулы:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))\ ,$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}=(1,0,\frac{\partial z}{\partial x})\ ,\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}=(0,1,\frac{\partial z}{\partial y})\ .$$

Уравнение касательной плоскости

$$Z=z(x_0,y_0)+\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(X-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(Y-y_0)\ .$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 , \ F = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} , \ G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 ,$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 ,$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy ,$$

$$S = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

5.2. Определение поверхностного интеграла I-го рода

Поверхностные интегралы I-го рода представляют собой естественное обобщение двойных интегралов подобно тому, как криволинейные интегралы I-го рода являются обобщением определенных интегралов.

Пусть дана гладкая регулярная поверхность

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = x(u, v) , \\ y = y(u, v) , \\ z = z(u, v) , \end{cases}$$

($(u, v) \in \mathcal{D}$) и пусть в области $\mathcal{V} \subset E_3$, $\mathcal{V} \supset \mathcal{S}$ определена некоторая функция $\rho = f(x, y, z)$. Пользуясь физической аналогией, можно трактовать поверхность $\mathcal{S}$ как неоднородную материальную пленку, подвешенную в пространстве, а функцию $\rho = f(x, y, z)$, рассматриваемую в точках поверхности $\mathcal{S}$, как плотность распределения материи этой пленки. Найдем массу такой неоднородной пленки.

Разобьем поверхность $\mathcal{S}$ сетью кусочно-гладких кривых на конечное число n малых участков $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, ..., \mathcal{S}_n$. В силу малого размера участков, плотность каждого участка можно считать постоянной, в силу чего масса Δm_i участка с номером i приближенно равна:

$$\Delta m_i \approx f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i ,$$

где (x_i, y_i, z_i) — точка, произвольно взятая внутри i-го участка поверхности; ΔS_i — площадь участка $\mathcal{S}_i$. Масса поверхности приближенно равна:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i\,.$$

Чем мельче будет разбиение нашей поверхности, тем точнее будет это равенство, а в пределе при беспредельном уменьшении каждого из элементарных участков $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ это равенство станет точным. Чтобы отразить тот факт, что размеры всех участков поверхности $\mathcal{S}_i$ мы будем устремлять к нулю, обозначим через $\Delta S_{\max}$ максимальную площадь среди всех участков $\mathcal{S}_i$. Тогда если $\Delta S_{\max} \to 0$, то и $\Delta S_i \to 0$ для всех i.

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i$$

при беспредельном уменьшении площадей ΔS_i элементарных участков $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ и беспредельном возрастании числа n элементарных участков называется *поверхностным интегралом I-го рода* от функции $f(x, y, z)$ по поверхности $\mathcal{S}$ и обозначается символом:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS\,.$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения поверхности $\mathcal{S}$, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) внутри элементарных участков $\mathcal{S}_i$.

Итак,

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i\,.$$

Замечание. Символ для обозначения поверхностного интеграла похож на символ для обозначения двойного интеграла. Тем самым подчеркивается двумерная природа поверхности $\mathcal{S}$, являющейся в данном случае областью интегрирования.

5.3. Сведение поверхностного интеграла I-го рода к двойному интегралу

Рассмотрим снова разбиение поверхности $\mathcal{S}$ сетью кривых на малые участки $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, ..., \mathcal{S}_n$. Тогда область $\mathcal{D}$ в пространстве параметров поверхности разложится на части $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, ..., \mathcal{D}_n$, взаимно-однозначно соответствующие этим участкам. Выберем в каждом участке $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ по точке (x_i, y_i, z_i), а в каждой области $\mathcal{D}_i$ области $\mathcal{D}$ по точке (u_i, v_i), которые также отвечают одна другой, то есть $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$. Представим поверхностный интеграл I-го рода в виде предела от суммы:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \lim_{\Delta S_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i \,.$$

По формуле для площади поверхности будем иметь:

$$\Delta S_i = \iint\limits_{\mathcal{D}_i} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \,.$$

Применив для этого интеграла теорему о среднем, получим:

$$\Delta S_i = \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = \tilde{u}_i \\ v = \tilde{v}_i}} \Delta D_i \,,$$

где $(\tilde{u}_i, \tilde{v}_i)$ — некоторая точка области $\mathcal{D}_i$, ΔD_i — площадь области $\mathcal{D}_i$.

Лемма.

$$\lim_{\Delta D_{max} \to 0} (\tilde{\sigma} - \sigma) = 0 \,,$$

где

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\, \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = u_i \\ v = v_i}} \Delta D_i \,,$$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\, \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = \tilde{u}_i \\ v = \tilde{v}_i}} \Delta D_i \,.$$

Доказательство. По теореме Кантора функция $\sqrt{EG - F^2}$ равномерно непрерывна на $\overline{\mathcal{D}_i}$, то есть $\forall \varepsilon > 0$ при достаточно малых диаметрах областей $\mathcal{D}_i$ будет справедлива оценка

$$|\sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = \tilde{u}_i \\ v = \tilde{v}_i}} - \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = u_i \\ v = v_i}}| < \varepsilon \,.$$

Отсюда приходим к оценке $|\tilde{\sigma} - \sigma| < \varepsilon MD$, где $|f(x, y, z)| < M$, D — площадь области $\mathcal{D}$. Лемма доказана.

Подставив полученное нами выражение для ΔS_i в интегральную сумму и учитывая лемму, получим:

$$\lim_{\Delta S_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i =$$

$$= \lim_{\Delta D_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\, \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = u_i \\ v = v_i}} \Delta D_i \,,$$

где через $\Delta D_{\max}$ мы обозначили максимальную из площадей ΔD_i. При этом мы учли, что стремление площадей ΔS_i всех участков $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ к нулю означает стремление к нулю площадей ΔD_i соответствующих им координатных областей $\mathcal{D}_i$. Полученная нами интегральная сумма отвечает двойному интегралу:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \,.$$

Таким образом, мы получили формулу:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\, \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \,,$$

которая называется *формулой сведения поверхностного интеграла I-го рода к двойному интегралу*. Она служит для вычисления поверхностных интегралов I-го рода.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\, dS$$

по поверхности эллипсоида

$$\mathcal{S}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ (a>b>c>0)\,.$$

Решение. Воспользуемся представлением эллипсоида:

$$x = a\cos\varphi\sin\theta\,,\ y = b\sin\varphi\sin\theta\,,\ z = c\cos\theta$$

$$(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)\,.$$

Тогда

$$E = (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\theta\,,$$

$$F = (b^2-a^2)\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta\,,$$

$$G = (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta\,,$$

а элемент поверхности

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= abc\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}}\ \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\,.$$

Подинтегральная функция при переходе к параметрам φ и θ

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}}\,.$$

По соображениям симметрии подинтегральной функции и области интегрирования вычисление можно привести к первому октанту координатной системы, поэтому

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\, dS =$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) .$$

Если поверхность $\mathcal{S}$ задана явным уравнением $z = z(x, y)$, то формула сведения поверхностного интеграла I-го рода к двойному интегралу примет вид:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy .$$

Пример. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\, dS ,$$

где $\mathcal{S}$ — это верхняя часть конуса $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$, отсекаемая цилиндром $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

Решение. Уравнение верхней части конуса можно записать в виде $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + k^2}\, dx\, dy ,$$

и, сводя наш поверхностный интеграл I-го рода к двойному, получим:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\, dS = \sqrt{1 + k^2}\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2y^2 + k^2(x^2 + y^2)^2)\, dx\, dy ,$$

где $\mathcal{D}$ — это круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ на плоскости xy. Решая этот двойной интеграл, найдем:

$$\sqrt{1 + k^2}\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2y^2 + k^2(x^2 + y^2)^2)\, dx\, dy = \frac{1}{24}(80k^2 + 7)\pi a^6\sqrt{1 + k^2} .$$

5.4. Определение поверхностного интеграла II-го рода

Поверхностный интеграл II-го рода строится по аналогии с криволинейным интегралом II-го рода. В случае криволинейного интеграла мы исходили из понятия ориентированной кривой и строили интегральную сумму для проекций некоторого векторного поля на направление касательной к кривой. Аналогичным образом мы рассмотрим здесь понятие ориентированной поверхности и будем строить интегральную сумму для проекций поля на выбранное направление, связанное с природой поверхности.

Определение. Гладкая регулярная поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует непрерывное поле единичных векторов нормалей. В противном случае поверхность называется *неориентируемой*.

Определение. Поверхность, на которой выбрано непрерывное поле единичных векторов нормалей, называется *ориентированной*.

На гладкой регулярной ориентируемой поверхности $\mathcal{S}$ существует только два непрерывных поля единичных векторов нормалей:

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{N}(u,v)}{|\mathbf{N}(u,v)|} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{n}}(u,v) = -\mathbf{n}(u,v)\,.$$

Таким образом, поверхность $\mathcal{S}$ может быть ориентирована двумя различными способами.

Пусть гладкая регулярная поверхность $\mathcal{S}$ без самопересечений ориентирована с помощью поля единичных векторов нормалей $\mathbf{n}(u,v)$, и пусть в области $\mathcal{V} \subset \mathsf{E}_3$, $\mathcal{V} \supset \mathcal{S}$ задано векторное поле

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

непрерывное на поверхности $\mathcal{S}$. Используя физическую аналогию, мы можем считать векторное поле $\mathbf{F}(x,y,z)$ полем скоростей некоторой движущейся физической среды (жидкости или газа), и решать задачу о том, какой объем этой среды протечет сквозь поверхность $\mathcal{S}$ в единицу времени. В физике такая величина (объем среды V, протекающий в единицу времени через выбранную поверхность) называется потоком. Итак, найдем поток V поля $\mathbf{F}(x, y, z)$ через поверхность $\mathcal{S}$.

Разобьем поверхность $\mathcal{S}$ сетью кривых на конечное число m малых участков $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, ..., \mathcal{S}_n$ и возьмем в каждом участке по точке (x_i, y_i, z_i). Рассмотрим проекцию F_n векторного поля $\mathbf{F}$ в точке (x_i, y_i, z_i) на направление единичной нормали $\mathbf{n}_i$ к поверхности $\mathcal{S}$ в этой точке

$$F_n(x_i, y_i, z_i) = \text{Пр}_{\mathbf{n}_i}\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) = (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{n}_i)\ ,$$

где круглыми скобками обозначено скалярное произведение соответствующих векторов. На малом участке $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ скорость протекающей сквозь него среды можно считать приблизительно постоянной в силу малости площади ΔS_i этого участка. Тогда поток ΔV_i через площадку $\mathcal{S}_i$ приблизительно равен:

$$\Delta V_i \approx F_n(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i\ ,$$

то есть объему цилиндра высотой $F_n(x_i, y_i, z_i)$ и площадью основания ΔS_i. Введем векторы $\Delta\mathbf{S}_i = \mathbf{n}_i\,\Delta S_i$, то есть векторы, направленные также, как векторы единичных нормалей, модули которых равны площадям соответствующих участков поверхности. Тогда, поскольку

$$F_n(x_i, y_i, z_i) = (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{n}_i)\ ,$$

то выражение для потока ΔV_i через площадку $\mathcal{S}_i$ можно переписать в виде:

$$\Delta V_i \approx (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \mathbf{n}_i)\,\Delta S_i = (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\mathbf{S}_i)\ ,$$

а поток V через поверхность $\mathcal{S}$:

$$V = \sum_{i=1}^{m} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\mathbf{S}_i)\ .$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем мельче разбиение поверхности $\mathcal{S}$ на элементарные области. В пределе при стремлении всех элементарных областей к нулю равенство станет точным:

$$V = \lim_{\Delta S_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\mathbf{S}_i) \, ,$$

где через $\Delta S_{\max}$ мы обозначили максимальную из площадей ΔS_i.

Определение. Конечный предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\mathbf{S}_i)$$

при беспредельном уменьшении площадей ΔS_i каждого из элементарных участков $\mathcal{S}_i$ поверхности $\mathcal{S}$ и беспредельном возрастании числа m элементарных участков называется *поверхностным интегралом II-го рода* от вектор-функции $\mathbf{F}(x, y, z)$ по поверхности $\mathcal{S}$ и обозначается символом:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dS}) \, .$$

Этот предел не должен зависеть ни от способа разбиения поверхности $\mathcal{S}$, ни от выбора точек (x_i, y_i, z_i) внутри элементарных участков $\mathcal{S}_i$.

Итак,

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dS}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\mathbf{S}_i) \, .$$

Определение. Поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}(x, y, z), \mathbf{dS}) \, ,$$

называется *потоком векторного поля* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *через ориентированную поверхность* $\mathcal{S}$.

5.5. Сведение поверхностного интеграла II-го рода к поверхностному интегралу I-го рода

Рассмотрим снова гладкую регулярную поверхность

$$\mathcal{S}:\begin{cases} x = x(u,v)\,, \\ y = y(u,v)\,, \\ z = z(u,v)\,, \end{cases}$$

без самопересечений, ориентированную с помощью поля единичных векторов нормалей

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{N}(u,v)}{|\mathbf{N}(u,v)|} = \frac{\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right]}{|\left[\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right]|}\,.$$

Компоненты векторного произведения

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)\right] = (A(u,v), B(u,v), C(u,v))\,,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\,,\; B = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}\,,\; C = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\,.$$

Модуль вектора нормали $\mathbf{N}(u,v)$, следовательно, равен:

$$|\mathbf{N}(u,v)| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.$$

Сравнение с соответствующей формулой из параграфа 5.1 даст нам, в частности, следующее равенство:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2\,.$$

Таким образом, компоненты поля единичных векторов нормалей имеют вид:

$$\mathbf{n}(u,v) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,,$$

где

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — косинусы направляющих углов вектора нормали, то есть углов, которые вектор нормали составляет с осями x, y и z декартовой координатной системы. Очевидно, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\,.$$

Учитывая все выше изложенное, поверхностный интеграл II-го рода от вектор-функции $\mathbf{F}(x,y,z)$ по поверхности $\mathcal{S}$ можно переписать в виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}}(\mathbf{F}(x,y,z),\mathbf{dS})=\iint\limits_{\mathcal{S}}(\mathbf{F}(x,y,z),\mathbf{n})\,dS=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{S}}(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\,dS\,,$$

где в правой части стоит поверхностный интеграл I-го рода от скалярной функции $P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma$. Полученная нами формула называется *формулой сведения поверхностного интеграла II-го рода к поверхностному интегралу I-го рода.* Эта формула служит для вычисления поверхностных интегралов II-го рода.

Проанализируем это выражение. Величина $dS\,\cos\alpha$ — это проекция бесконечно малого участка поверхности dS на координатную плоскость yz, в силу чего мы можем записать $dy\,dz=dS\,\cos\alpha$. По аналогичным соображениям $dz\,dx=dS\,\cos\beta$, $dx\,dy=dS\,\cos\gamma$, поэтому поверхностный интеграл II-го рода можно переписать в виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}}(\mathbf{F}(x,y,z),\mathbf{dS})=\iint\limits_{\mathcal{S}}P(x,y,z)\,dy\,dz+Q(x,y,z)\,dz\,dx+R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$$

Это координатная запись поверхностного интеграла II-го рода, позволяющая записать этот интеграл через функции компонент векторного поля $\mathbf{F}(x,y,z)$. Следует заметить, что при равенстве нулю некоторых из компонент векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$, соответствующие слагаемые в выражении для поверхностного интеграла II-го рода будут отсутствовать. Формулу сведения поверхностного интеграла II-го рода к поверхностному интегралу I-го рода можно теперь записать в виде:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) dS\,.$$

Если свести поверхностный интеграл I-го рода, стоящий в правой части этого выражения, к двойному интегралу, воспользовавшись равенством $dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv$ и выражениями для $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то мы получим следующую формулу:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} (PA + QB + RC)\,du\,dv\,,$$

которая сводит вычисление поверхностного интеграла II-го рода к двойному интегралу по координатной области $\mathcal{D}$ поверхности $\mathcal{S}$.

Существует еще один метод сведения поверхностного интеграла II-го рода к двойному интегралу. Координатное выражение для поверхностного интеграла II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

можно рассматривать как три двойных интеграла по соответствующим координатным плоскостям, а именно, пусть область $\mathcal{D}$ — это проекция поверхности $\mathcal{S}$ на координатную плоскость xy, область $\mathcal{D}'$ — ее проекция на координатную плоскость xz, а область $\mathcal{D}''$ — на плоскость yz.

Тогда поверхностный интеграл II-го рода можно вычислить по формуле:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dz\,dx + R(x,y,z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}''} P(x(y,z),y,z)\,dy\,dz + \iint\limits_{\mathcal{D}'} Q(x,y(x,z),z)\,dz\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{\mathcal{D}} R(x,y,z(x,y))\,dx\,dy\ ,$$

где подразумевается, что уравнение поверхности $\mathcal{S}$ можно одновременно записать в трех вариантах явной формы: $z = z(x,y)$, $x = x(y,z)$ и $y = y(x,z)$. Следует однако отметить, что знаки слагаемых в этой формуле должны быть такими же, как знаки соответствующих направляющих косинусов векторов нормалей, поэтому следует внимательно следить за этим соответствием знаков исходя из геометрии поверхности.

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\ ,$$

где поверхность $\mathcal{S}$ — это нижняя сторона круга $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $z = 0$.

Решение. Поскольку поверхность $\mathcal{S}$ совпадает со своей проекцией $\mathcal{D}$ на плоскость xy, то, учитывая, что $\mathbf{n}(x,y) = (0,0,-1)$, имеем:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{2}R^4\ .$$

Пример 2. Вычислить поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy\ ,$$

где поверхность $\mathcal{S}$ — это внешняя сторона сферы

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\ .$$

Решение. Вычислим интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 \, dx \, dy \, .$$

Так как явное уравнение сферы будет:

$$z - c = \pm\sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \, ,$$

где плюс отвечает верхней полусфере, а минус — нижней, то удобно представить подинтегральную функцию z^2 в виде:

$$z^2 = (z-c)^2 + c^2 + 2c(z-c) \, .$$

Сумма первых двух членов, будучи проинтегрирована по верхней стороне верхней полусферы и нижней стороне нижней полусферы, дает результаты разных знаков, которые взаимно уничтожаются. Последний член сам меняет знак при переходе от верхней полусферы к нижней, поэтому при интегрировании дает по ним равные результаты, так что

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} z^2 \, dx \, dy = 4c \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \, dx \, dy = \frac{8}{3}\pi c R^3 \, ,$$

где $\mathcal{D}$ — это круг, ограниченный окружностью $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Аналогично вычисляются два других интеграла

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 \, dy \, dz \, , \ \iint\limits_{\mathcal{S}} y^2 \, dz \, dx \, ,$$

что окончательно дает:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy = \frac{8}{3}\pi R^3 (a + b + c) \, .$$

5.6. Поток векторного поля. Формула Остроградского-Гаусса. Дивергенция

Пусть задано векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ и ориентируемая поверхность $\mathcal{S}$ с выбранным на ней полем единичных нормалей $\mathbf{n}$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ в точках поверхности $\mathcal{S}$ и построим его проекцию на нормаль $\mathbf{n}$ в каждой точке. Проекцию векторного поля на поле нормалей будем обозначать F_n. Она является скалярной функцией на поверхности $\mathcal{S}$.

Определение. Поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}, \mathbf{dS}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} F_n \, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \, ,$$

называется *потоком векторного поля* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *через поверхность* $\mathcal{S}$ *в выбранном направлении* $\mathbf{n}$.

В предыдущей главе было показано, что если векторное поле представляет из себя поле скоростей некоторой материальной среды, то введенное нами понятие потока векторного поля совпадает с его физическим аналогом и с нашими интуитивными представлениями.

Определение. Говорят, что область $\mathcal{V} \subset E_3$ элементарна относительно некоторой оси (прямой в пространстве), если она целиком содержит любой отрезок, параллельный этой оси, концы которого принадлежат области.

Рассмотрим некоторую область $\mathcal{V} \subset E_3$, элементарную относительно координатных осей декартовой системы координат и ограниченную замкнутой поверхностью $\mathcal{S}$. Ориентируем поверхность $\mathcal{S}$ полем $\mathbf{n}$ внешних по отношению к области $\mathcal{V}$ единичных нормалей. Пусть дано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$, определенное в области $\mathcal{G}$ $(\mathcal{G} \supset \overline{\mathcal{V}})$. Тогда имеет место следующая формула

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \, ,$$

которая называется *формулой Остроградского-Гаусса.*

Величина, стоящая под знаком тройного интеграла имеет специальное название.

Определение. Скалярная функция

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \,,$$

называется *дивергенцией векторного поля* $\mathbf{F}(x, y, z)$ и обозначается символом $\operatorname{div}\mathbf{F}$, то есть

$$\operatorname{div}\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \,.$$

Дивергенцию также называют *расходимостью векторного поля.* Пользуясь введенными выше понятиями, сформулируем следующую теорему.

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля $\mathbf{F}$ через замкнутую поверхность $\mathcal{S}$ в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему тела $\mathcal{V}$, ограниченному этой поверхностью:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}, \mathbf{dS}) = \iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV \,.$$

Доказательство. В предположении, что область $\mathcal{V}$ элементарна относительно координатных осей, докажем формулу

$$\iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{S}} R\, dx\, dy \,.$$

В силу элементарности области $\mathcal{V}$ относительно оси z, ее можно представить в виде:

$$\overline{\mathcal{V}} = \{(x, y, z) \,|\, z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}_{xy}\} \,,$$

где графики непрерывных функций $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ являются поверхностями $\mathcal{S}_{\text{ниж}}$ и $\mathcal{S}_{\text{верх}}$, ограничивающими область $\mathcal{V}$ снизу и сверху соответственно, $\mathcal{D}_{xy}$ — проекция тела $\mathcal{V}$ на координатную плоскость xy.

Вычислим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{D}_{xy}} dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_{xy}} \left(R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}_{\text{ниж}}} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_{\text{верх}}} R\cos\gamma\, dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_{\text{бок}}} R\cos\gamma\, dS =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}} R\cos\gamma\, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}} R\, dx\, dy\,,$$

где мы учли, что поверхностный интеграл через боковую цилиндрическую поверхность

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_{\text{бок}}} R\cos\gamma\, dS = 0\,.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{S}} P\, dy\, dz\,,$$

$$\iiint\limits_{\overline{\mathcal{V}}} \frac{\partial Q}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\mathcal{S}} Q\, dz\, dx\,.$$

Складывая все доказанные равенства почленно, получим утверждение теоремы. Очевидно, что эта теорема верна также для случая произвольной области $\mathcal{V}$, которую можно разбить на конечное число подобластей элементарных относительно координатных осей, что практически всегда можно сделать. Теорема доказана.

Из определения дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{F}$ видно, что она является скалярным полем, порождаемым векторным полем $\mathbf{F}$. Однако из приведенного выше определения может создаться впечатление, что дивергенция зависит от выбора системы координат. Покажем, что это не так. Возьмем некоторую точку (x_0, y_0, z_0) в области определения поля $\mathbf{F}$ и окружим ее замкнутой поверхностью $\mathcal{S}$, ограничивающей некоторое тело $\mathcal{V}$, содержащее эту точку. Если воспользоваться формулой Остроградского-Гаусса, разделив обе ее части на объем V тела $\mathcal{V}$

$$\frac{\displaystyle\iiint\limits_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV}{V} = \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}, \mathbf{dS})}{V},$$

перейти к пределу $V \to 0$, стягивая тело $\mathcal{V}$, а значит и ограничивающую его замкнутую поверхность $\mathcal{S}$ в точку (x_0, y_0, z_0), и воспользоваться теоремой о среднем значении для интеграла, стоящего в левой части равенства, то получится значение дивергенции в этой точке

$$\operatorname{div}\mathbf{F}\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\substack{V\to 0\\ \mathcal{S}\to(x_0,y_0,z_0)}} \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} (\mathbf{F}, \mathbf{dS})}{V}.$$

Это равенство может служить определением дивергенции, причем в этой форме определение уже не зависит от координатной системы. Таким образом, можно утверждать, что дивергенция — это скалярное поле, порождаемое векторным полем.

Для понимания смысла дивергенции, обратимся к физической аналогии. Пусть поле $\mathbf{F}$ есть поле скоростей материальной среды. Тогда из полученного выше определения видно, что дивергенция в данной точке равна потоку среды, вытекающему из бесконечно малого объема. Отсюда и произошел термин дивергенция (расходимость): среда растекается из тех точек (источников), где $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$, и, наоборот, стекается туда, где

$\operatorname{div}\mathbf{F} < 0$ (стоки). Величину дивергенции $\operatorname{div}\mathbf{F}$ часто называют поэтому *мощностью (плотностью) источников векторного поля* $\mathbf{F}$.

5.7. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Ротор

Пусть задано векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ и некоторый замкнутый ориентированный контур C. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F}(x, y, z)$ в точках этого контура и построим его проекцию на касательное направление к контуру в направлении его обхода. Величину этой проекции будем обозначать через F_l, то есть $F_l = \text{Пр}_{\mathbf{dl}}\mathbf{F}(x, y, z)$, где $\mathbf{dl}$ бесконечно малый вектор смещения по контуру C в направлении его обхода.

Определение. Криволинейный интеграл II-го рода

$$\oint\limits_C (\mathbf{F}, \mathbf{dl}) = \int\limits_C F_l\, dl = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

по замкнутому контуру C, называется *циркуляцией векторного поля* $\mathbf{F}(x, y, z)$ *по контуру* C.

Пусть $\mathcal{P}$ — гладкая (класса C^2) регулярная поверхность без самопересечений $\mathcal{P} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in G \subset E_2$, и пусть $\Gamma \subset G$ простой замкнутый контур в координатной области G поверхности $\mathcal{P}$

$$\Gamma : \begin{cases} u = u(t)\,, \\ v = v(t)\,, \quad \tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2\,, \end{cases}$$

где функции $u = u(t)$ и $v = v(t)$ класса C^2. Обозначим $\mathcal{D}$ — область, ограниченную контуром Γ.

Уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$ задает простой замкнутый контур C, лежащий на поверхности $\mathcal{P}$. Обозначим $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$ часть поверхности $\mathcal{P}$. При этих условиях говорят, что контур C является *границей (краем)* поверхности $\mathcal{S}$ и пишут $C = \partial\mathcal{S}$. Про поверхность $\mathcal{S}$ при этом говорят, что она натянута на контур C.

Выберем на поверхности $\mathcal{P}$, а значит и на поверхности $\mathcal{S}$, поле единичных нормалей $\mathbf{n}$. Ориентируем контур C так, чтобы при обходе по нему точки поверхности $\mathcal{S}$ оставались слева если смотреть на поверхность $\mathcal{S}$ с выбранной стороны. Такие ориентации поверхности $\mathcal{S}$ и ее границы C называют *согласованными*.

Пусть замкнутая область $\overline{\mathcal{D}}$ такова, что можно воспользоваться формулой Грина и пусть в области $\mathcal{V}$ $(\mathcal{V} \supset \mathcal{P})$ задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}\,.$$

Тогда в предположении согласованной ориентации поверхности $\mathcal{S}$ и ее границы $C = \partial\mathcal{S}$ имеет место следующая формула

$$\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS\,,$$

которая называется *формулой Стокса*. В правой части формулы Стокса стоит поверхностный интеграл I-го рода, который является выражением для поверхностного интеграла II-го рода по поверхности $\mathcal{S}$ от некоторой вектор-функции.

Определение. Вектор-функция с координатами

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\,,$$

называется *ротором векторного поля* $\mathbf{F}(x, y, z)$ и обозначается символом

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}\,,$$

то есть

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}\,.$$

Ротор также называют *вихрем векторного поля.* Легко видеть, что в правой части формулы Стокса стоит поверхностный интеграл II-го рода по поверхности $\mathcal{S}$ от ротора векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$, поэтому, пользуясь введенными выше понятиями, можно утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\mathbf{F}$ по замкнутому контуру C равна потоку ротора этого поля через поверхность $\mathcal{S}$, опирающуюся на контур C:

$$\oint\limits_{C} (\mathbf{F}, \mathbf{dl}) = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{dS}) \,.$$

Доказательство. Вычислим поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dz\, dx = \iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix} - \frac{\partial R}{\partial x}\begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}\right) du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v} - \left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u}\right) du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) du\, dv = \iint\limits_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(R\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(R\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right) du\, dv =$$

$$= \oint\limits_{\Gamma} R\frac{\partial z}{\partial u}\, du + R\frac{\partial z}{\partial v}\, dv = \oint\limits_{C} R\, dz \,.$$

Аналогично доказываются формулы

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint\limits_{C} P\, dx \,,$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dz - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz = \oint\limits_{C} Q\, dy \,.$$

Складывая доказанные формулы, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из определения ротора $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ видно, что он является векторным полем, порождаемым векторным полем $\mathbf{F}$. Однако это определение страдает тем же недостатком, что и приведенное нами ранее подобное определение дивергенции, то есть в нем используется определенная координатная система. Покажем, что ротор не зависит от выбора системы координат. Возьмем некоторую точку (x_0, y_0, z_0) в области определения поля $\mathbf{F}$. Выберем любое направление $\mathbf{n}$, исходящее из этой точки, и окружим ее в перпендикулярной к $\mathbf{n}$ плоскости некоторой площадкой $\mathcal{S}$, ограниченной контуром C. Если воспользоваться формулой Стокса, разделив обе ее части на площадь S площадки $\mathcal{S}$

$$\frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{dS})}{S} = \frac{\displaystyle\oint\limits_{C} (\mathbf{F}, \mathbf{dl})}{S},$$

перейти к пределу $S \to 0$, стягивая площадку $\mathcal{S}$, а значит и контур C в точку (x_0, y_0, z_0), и воспользоваться теоремой о среднем значении для интеграла, стоящего в левой части равенства, то получится значение проекции ротора на направление $\mathbf{n}$ в этой точке:

$$\operatorname{rot}_{n}\mathbf{F}\,\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = (\operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n})\,\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim_{\substack{S\to 0 \\ C\to(x_0,y_0,z_0)}} \frac{\displaystyle\oint\limits_{C} (\mathbf{F}, \mathbf{dl})}{S}.$$

Таким образом, удается определить проекцию вектора $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ на любую ось, а значит, и сам вектор. Это равенство может служить определением ротора, причем в этой форме определение уже не зависит от координатной системы. Итак, можно утверждать, что ротор – это векторное поле, порождаемое векторным полем.

Для понимания смысла ротора, снова обратимся к физической аналогии. Пусть поле $\mathbf{F}$ есть поле скоростей материальной среды. Из полученного выше определения видно, что ротор в данной точке равен циркуляции среды по бесконечно малому контуру, окружающему точку. Пусть контур — это малая окружность радиуса r. Из курса физики мы знаем, что скорость перемещения частиц среды всегда можно представить в виде суммы поступательного и вращательного движений:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + [\Omega, \mathbf{r}] \; ,$$

где $\mathbf{F}_0$ — скорость поступательного движения, а Ω — вектор угловой скорости вращательного движения. Поступательную скорость точек малого контура можно приближенно считать постоянной, поэтому $\operatorname{rot} \mathbf{F}_0 = 0$, и значит

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} [\Omega, \mathbf{r}] \; .$$

Вектор $[\Omega, \mathbf{r}]$ является вектором линейной скорости по окружности и равен по модулю Ωr. Поскольку этот вектор всегда направлен в направлении касательной к окружности, то для оценки величины циркуляции этого вектора по малой окружности достаточно умножить модуль этого вектора на длину окружности, то есть на $2\pi r$, откуда циркуляция равна $2\Omega\pi r^2$. Пользуясь определением ротора, и замечая, что площадь внутри нашего контура равна πr^2 (площадь окружности), получим, что ротор в данной точке равен:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 2\Omega \; .$$

То, что направления векторов $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ и Ω совпадают можно показать непосредственным вычислением выражения $\operatorname{rot} [\Omega, \mathbf{r}]$ в некоторой координатной системе (см. упр. 6).

Из полученного выше соотношения и произошел термин ротор (вихрь): ротор линейной скорости материальной среды в данной точке равен удвоенному вектору угловой скорости вращения малого элемента объема среды, окружающего эту точку.

5.8. Упражнения

1. Вычислить поверхностный интеграл I-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} x^2 yz\, dS\,,$$

где $\mathcal{S}$ — часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

2. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой круговым цилиндром $x^2+y^2 = a^2$, если плотность в каждой точке поверхности равна $k|z|$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

3. Вычислить поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} y\, dx\, dz\,,$$

где $\mathcal{S}$ — верхняя сторона части плоскости $x+y+z=a$, лежащей в первом октанте.

4. Вычислить поверхностный интеграл II-го рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} z^2\, dx\, dy\,,$$

где $\mathcal{S}$ — верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

5. Найти поток векторного поля $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ через поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2 = 3R^2$, $x^2+y^2-z^2 = R^2$, $z = 0$ в направлении внешней нормали.

6. Покажите, что ротор поля скоростей материальной среды равен удвоенному вектору угловой скорости вращения среды непосредственным вычислением ротора в некоторой декартовой системе координат.

Указание. Воспользуйтесь выведенным в параграфе 5.4 соотношением $\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\,[\Omega, \mathbf{r}]$. Вычислите компоненты поля $[\Omega, \mathbf{r}]$ в декартовой координатной системе, а затем вычислите компоненты ротора этого поля. Убедитесь, что они в точности равны удвоенным компонентам вектора Ω.

Литература

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. М.: Лань, 2005.

2. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 1-2. М.: МЦНМО, 2007.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1-3 М.: Дрофа, 2006.

4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ 2009.

Содержание

Даньшин Александр Юрьевич

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

Учебное пособие